PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

vereinigt mit dem

JAHRBUCH DER RADIOAKTIVITÄT UND ELEKTRONIK

Nr. 19 — 1. Oktober 1939 — Redaktionsschluß für Nr. 21 am 15. Oktober 1939 — 40. Jahrgang

INHALT:

Abhandlungen:

E.-F. Richter, Über den Wechselstromwiderstand von keramischen Werkstoffen bei Temperaturen bis zu 600°. S. 597.

A. Budó, Einfluß der Molekülform und freidrehbarer Dipolgruppen auf die dielektrische Relaxation. S. 603.

G. Schmerwitz, Meßergebnisse mitteleuropäischer Erdbebenstationen und ihre physikalische Auswertung. S. 611.

P. O. Müller, Über den Abstand der Energiestufen der Atomkerne. S. 615.

W. Kolhörster u. I. Matthes, Die Absorption der Höhenstrahlung in der Atmosphäre und die Mesonen. S. 617.

Besprechungen:

Kants Opus postumum. Bd. I und Bd. II. S. 619.

J. Meyer, Einführung in die Chemie für Studierende technischer Berufe. S. 620.

Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung. Bd. 20. S. 620.

M. Ott, Chemie für Studierende und zum Selbstunterricht. S. 620.

Nachrichten. S. 620.

ABHANDLUNGEN

Über den Wechselstromwiderstand von keramischen Werkstoffen bei Temperaturen bis zu 600°

Von E.-F. Richter

Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt

In einer früheren Arbeit über den Isolationswiderstand von keramischen Werkstoffen bei Temperaturen bis zu 900°[1]), im folgenden mit (I) bezeichnet, wurde festgestellt, daß bei alkalihaltigen keramischen Werkstoffen die Beanspruchung mit Gleichspannung eine elektrolytische Reinigung zur Folge hat, und daß infolgedessen der Gleichstromisolationswiderstand mit der Zeit stark ansteigt [(I) Abb. 9]. Man kann daher bei Gleichspannung mit einiger Genauigkeit nur den Widerstandswert bestimmen, den das untersuchte Material als Dauerwiderstand annimmt. Die Übertragung der gemessenen Gleichstrom-Dauerisolationswiderstände auf die Verhältnisse bei Wechselstrom erschien unzulässig, da bei Wechselspannungsbeanspruchung eine wesentliche Veränderung der keramischen Stoffe durch elektrolytische Vorgänge von vornherein unwahrscheinlich ist. Da jedoch sehr viele Apparate, in denen keramische Werkstoffe als Isolierstoffe Verwendung finden, mit Wechselstrom betrieben werden, wurde ein Prüfverfahren mit Wechselspannung entwickelt, um auch für die Beherrschung der Verhältnisse bei Wechselstrom geeignete Zahlenwerte zu bekommen. Über dieses Meßverfahren soll nachfolgend berichtet werden.

1) G. Pfestorf und E.-F. Richter, Physik. Zeitschr. **39**, 141, 1938.

Untersuchte Werkstoffe

Um bei der Entwicklung des Prüfverfahrens gleichzeitig einen Überblick über das Verhalten der Isolierstoffe zu bekommen, wurden von vornherein drei untereinander in ihrer Zusammensetzung sehr verschiedene Vertreter von keramischen Werkstoffen ausgewählt und die Untersuchungen an diesen Stoffen in gleicher Weise durchgeführt. Benutzt wurde ein Hartporzellan (Werkstoff V), eine magnesiumsilikathaltige Sondermasse (Werkstoff IV), die bereits früher (I) untersucht wurden und eine weitere Sondermasse, die mit Werkstoff VI bezeichnet werden soll. Gemäß der Eigenschaftstafel keramischer Werkstoffe[1]) gehört Werkstoff V der Gruppe Ia, die Werkstoffe IV und VI der Gruppe II 2 an. Die Werkstoffe lagen in Form von Platten mit kreisförmiger Grundfläche von etwa 80 mm Durchmesser und etwa 5 mm Stärke vor. Die größten Schwankungen der Stärke der einzelnen Platten lagen unter 2 Proz.

Versuchsanordnung

Der Prüfling wurde in einen serienmäßigen Muffelofen in der Weise eingebaut, daß er beim Anschluß der Zuführungen leicht zugänglich war und auf einem Wagen in die Muffel eingefahren werden konnte (Abb. 1). Die gleichfalls auf den Wagen montierte Tür verschließt die Muffel und trägt Durchführungen für die Meß-, Spannungs- und Erdungsleitungen und für das Thermoelement. Die Prüfkörper wurden nach Art eines Schutzringkondensators mit festeingebrannten Metallschichten versehen und die Spannung über

1) W. Weicker, E. Kunstmann und W. Demuth, Elektrotechn. Zeitschr. **56**, 915, 1935.

Platindrahtspiralen zugeführt, die geeignet gewickelt und von Nickelringen belastet wurden. Bei großer Stromaufnahme, die bei einigen Prüfkörpern in der Nähe von 600° über 0,1 A anstieg, hat sich diese Art der Stromzu- bzw. -abführung als notwendig erwiesen, um Verbrennungen der

Abb. 1. Versuchsanordnung.

aufgebrachten Elektroden zu vermeiden. Die Wärmeübergangswiderstände zwischen Prüfkörper und dem Eisentraggerüst und zwischen diesem und der Tür wurden durch Zwischenlagen aus Quarz und Chamotte nach Möglichkeit heraufgesetzt. Die Temperaturmessung wurde mit einem Thermoelement unmittelbar über der Meßbelegung vorgenommen. Der Muffelofen hatte eine einstellbare, durch ein zweites Thermoelement geregelte Temperatur, so daß bei steigenden, bei fallenden und auch bei konstanten Temperaturen gemessen werden konnte.

Erwärmung und Abkühlung

Die Anwärmzeiten des Ofens waren die gleichen wie in der früheren Arbeit bei Gleichstrom (I), so daß eine Anwärmung auf 600° in etwa 3 h erfolgte. Die Abkühlung von 600 auf 200° nahm dagegen etwa 9 h in Anspruch. Bei vielen Versuchsreihen wurde bei steigenden und bei fallenden Temperaturen gemessen, auch stellte es sich als zweckmäßig heraus, bei der Höchsttemperatur von 600° die Temperatur zur besseren Durchwärmung des Prüfkörpers während 1 h konstant zu halten und danach erst die Heizung abzuschalten. Während der Messungen wurde der Heizstrom des Ofens vorübergehend abgeschaltet, um Störungen zu vermeiden.

Elektrische Meßeinrichtung

Infolge der hohen Dielektrizitätskonstanten der keramischen Werkstoffe ist eine Trennung der beobachteten Wechselströme in Blind- und Wirkkomponenten unerläßlich, so daß die bekannten Brückenanordnungen zur Bestimmung des Wechselstromwirk- und -blindwiderstandes bzw. des Verlustfaktors und der Kapazität der Prüflinge als geeignete Meßanordnungen gewählt wurden. Für sehr hohe Wirkströme wurde in einem zweiten Meßverfahren auch mit direkt zeigenden Wechselstromamperemetern gearbeitet.

Entsprechend dem Hauptanwendungsgebiet der Isolierstoffe erstreckten sich die ersten Versuche auf die technische Frequenz von 50 Hz. Als Meßspannung wurde entsprechend den früheren Versuchen mit Gleichspannung (I) eine Wechselspannung von 100 V eingeführt. Die elektrische Meßanordnung wurde bei hohen Widerstandswerten ($> 10^9\ \Omega$cm) aus der Scheringschen Hochspannungsbrücke, einem Vibrationsgalvanometer mittlerer Empfindlichkeit (10^{-6} A/cm) und einem praktisch verlustfreien Normalkondensator zusammengestellt, wobei Verlustfaktoren von etwa 0,005 bis zu 1,1 gemessen werden konnten. Niedrige Werte des spezifischen Widerstandes ($< 10^9\ \Omega$cm) wurden aus Strom- und Spannungsmessungen unmittelbar errechnet. Der Isolationsstrom betrug bei dem direkten Meßverfahren etwa 0,001 bis 100 mA.

Darstellung der Ergebnisse

Die beiden elektrischen Meßverfahren sind untereinander grundverschieden: Bei der Messung mit der Wechselstrombrücke werden Werte des dielektrischen Verlustfaktors und der Kapazität, mit Volt- und Amperemetern Scheinwiderstände erhalten. Die Ergebnisse sind daher grundsätzlich nicht miteinander zu vergleichen, wenn nicht bestimmte Voraussetzungen über das Zustandekommen der dielektrischen Verluste gemacht werden. Es soll daher als Modell des verlustbehafteten, mit dem Werkstoff als Dielektrikum ausgefüllten Kondensators ein verlustfreier Kondensator angenommen werden, dem ein Ohmscher Widerstand parallel liegt. Der Widerstandswert R wäre in diesem einfachen Ersatzschema nach der Formel

$$R = \frac{1}{\omega C_1 \operatorname{tg}\delta}$$

zu errechnen, wobei ω die Kreisfrequenz, $\operatorname{tg}\delta$ den Verlustfaktor und C_1 die gemessene Kapazität des Prüfkondensators bedeuten[1]). Unter Berücksichtigung der Abmessungen der Meßbelegungen und des Prüflings wurden die Widerstandswerte als Werte des spezifischen Widerstandes in Ωcm angegeben. In der Ordinatenachse erscheint in

1) W. Endres, Hescho Mitt., H. 80, 2561, 1939.

der graphischen Darstellung der direkt gemessene Scheinwert oder der aus tg δ- und C-Messungen errechnete Wirkwert des spezifischen elektrischen Wechselstromwiderstandes in logarithmischem Maßstab, während in der Abszissenachse der reziproke Wert der absoluten Temperatur aufgetragen ist. Dabei sind genau wie in (I) der besseren Übersicht halber auf der Temperaturachse nicht die Reziprokwerte, sondern die Werte der dazugehörigen Temperatur in Zentigraden angegeben. Es ergibt sich in dieser Darstellungsweise sofort aus der Gestalt der Widerstandstemperaturkurve eine Beurteilung, inwieweit die Rasch-Hinrichsen-Gleichung, die eine Proportionalität zwischen dem Logarithmus des spezifischen Widerstandes und dem Reziprokwert der absoluten Temperatur fordert, erfüllt ist [vgl. (I)].

Ergebnisse

Die folgenden Abb. 2–4 zeigen je eine Kurve für die Materialien V, IV und VI. Auffällig ist zunächst der starke Unterschied in den Absolutwerten der spezifischen Widerstände. Porzellan (Werkstoff V) hat im ganzen Temperaturbereich von 200–600° einen um etwa 3 Größenordnungen geringeren Widerstand als die Sondermassen IV und VI. Auch die Gestalt der Kurven deutet auf unterschiedliches Verhalten hin. So befolgt

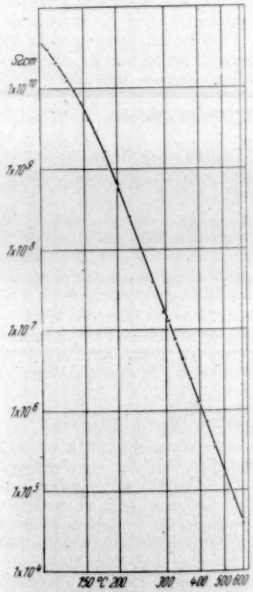


Abb. 2. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes bei $\omega = 314$, Werkstoff V.

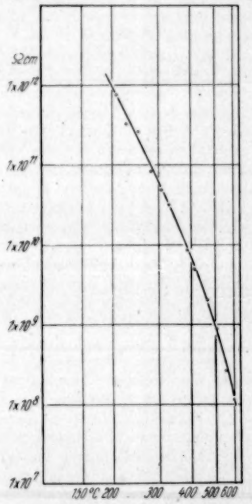


Abb. 3. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes bei $\omega = 314$, Werkstoff IV.

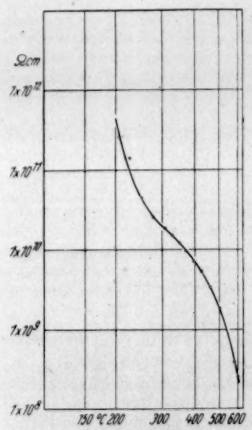


Abb. 4. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes bei $\omega = 314$, Werkstoff VI.

Werkstoff V (Abb. 2) zwischen 600 und 200°, wie aus der Geradlinigkeit der gezeichneten Abhängigkeit zu erkennen ist, sehr genau die Rasch-Hinrichsen-Gleichung, während die Untersuchung von Werkstoff IV (Abb. 3) eine schwach geschwungene und von Werkstoff VI (Abb. 4) eine doppelt gekrümmte Kurve ergibt.

Keine der drei Kurven zeigt eine Unstetigkeit bei den Temperaturwerten, bei denen die elektrischen Meßverfahren gewechselt wurden, so daß wenigstens in den Temperaturgebieten, die bei Werkstoff V um 200°, bei IV und VI um 450° liegen, erfahrungsgemäß die aus Verlustfaktor- und Kapazitätsmessungen nach der oben angegebenen Formel errechneten Wirkwiderstände und die mit Volt- und Amperemeter bestimmten Scheinwiderstände übereinstimmen, womit die bei der Wahl des Ersatzschemas gemachten Annahmen über das Zustandekommen der dielektrischen Verluste ihre Bestätigung finden.

In den Abbildungen sind mit Rücksicht auf die Übersichtlichkeit nur wenige Punkte einer Meßreihe eingezeichnet. Bei diesen Untersuchungen lag die Spannung nur kurze Zeit während der eigentlichen Messung am Prüfkörper. Weitere Meßreihen zeigten, daß auch bei dauernder Spannungsbeanspruchung die Kurven denselben Verlauf nehmen. Ferner wurde festgestellt, daß die Meßwerte auch bei mehrmaliger Wiederholung am gleichen Prüfling sich als gut reproduzierbar erweisen, und daß die Streuung bei Verwendung verschiedener Prüfkörper derselben Werkstoffsorte in erträglichen Grenzen bleibt. Die Unterschiede zwischen den bei gleicher Temperatur gefundenen höchsten und niedrigsten Widerstandswerten eines Werkstoffes betragen oberhalb 300° etwa 10–20 Proz., unterhalb 300° etwa 20–30 Proz. des Absolutwertes.

Die Prüflinge wurden im allgemeinen zwischen aufgebrannten Platinelektroden untersucht, in einigen Fällen wurden auch eingebrannte Silberschichten angewandt. Zwischen Silberelektroden zeigt Werkstoff V im Gegensatz zu dem bei Gleichstrom festgestellten Verhalten (I) dieselbe Kurve wie zwischen Platin, dagegen traten bei den Werkstoffen IV und VI oberhalb 450° Störungen auf, die eine Messung unmöglich machten.

Thermische Trägheit der Prüfkörper

Alle angegebenen Widerstandswerte wurden während der Abkühlung des Ofens aufgenommen. Die bei der 3stündigen Erwärmung auf 600° gemessenen Werte liegen um 25–100 Proz. oberhalb der bei fallenden Temperaturen festgestellten. Der Fehler beruht darauf, daß das unmittelbar über dem Prüfling angeordnete Thermoelement bei der verhältnismäßig schnellen Erwärmung eine höhere Temperatur anzeigt als im Innern des Prüfkörpers herrscht und daher ein für die angezeigte Temperatur zu hoher Isolationswiderstand vorgetäuscht wird. Wie Untersuchungen nach 24stündiger Lagerung bei konstanter Temperatur zeigten, besteht zwischen den während der Abkühlung im Prüfkörper herrschenden und den vom Thermoelement angezeigten Temperaturen kein Unterschied.

Technisches Meßverfahren

Die Notwendigkeit einer geringen Abkühlungsgeschwindigkeit oder einer langen Lagerung bei konstanter Temperatur würde der Einführung des Verfahrens für technische Messungen mit Anspruch auf einige Genauigkeit sehr hinderlich sein; es mußte daher versucht werden, die Lagerungszeiten nach Möglichkeit herabzusetzen, um während eines Arbeitstages die Messung eines Prüflings zu vollenden. In einem abgekürzten Meßverfahren wurde der Ofen, bei Zimmertemperatur beginnend, innerhalb 30 min auf die erste Meßtemperatur, 200°, angewärmt, 60 min lang bei 200° konstant gehalten, die Messung ausgeführt, dann in 30 min auf 300° erwärmt, bei 300° 60 min konstant gehalten und darauf gemessen usw. bis zur Messung bei 600°. Die Ergebnisse zeigten eine für technische Zwecke vollkommen ausreichende Übereinstimmung mit den Werten bei längerer Vorwärmzeit.

Einfluß der Brennhaut

Im Laufe der Untersuchungen wurden auch einige Probekörper untersucht, deren Oberflächen abgeschliffen waren. Diese Prüflinge zeigten eine beträchtliche Änderung des Isolationswiderstandes gegenüber Proben mit unverletzter Brennhaut. Bei Werkstoff V wurde eine Erhöhung der Widerstandswerte durch Schleifen der Oberfläche um 20–40 Proz., bei Werkstoff IV eine Erniedrigung um 40–70 Proz. gefunden. Bei Vergleichsversuchen müssen also stets Prüflinge verwandt werden, die in gleicher Weise vorbehandelt sind.

Einfluß der Feldstärke

Die Stärke der Platten beeinflußt die am Prüfkondensator bei der festgesetzten Prüfspannung von 100 V liegende Feldstärke, und es ist daher für das Prüfverfahren wichtig, zu ermitteln, inwieweit Änderungen der Feldstärke in dem etwa in Frage kommenden Bereich von Einfluß auf die Widerstandswerte sind. Diese Messungen sind an den drei Werkstoffen zwischen Platinelektroden nach 1stündiger Vorwärmung durchgeführt worden. Zwischen 25 und 300 Volt ergeben sich

keine wesentlichen systematischen Änderungen, die vergleichbar sind mit den Veränderungen der Widerstandswerte durch die Schwankungen der Ofentemperatur innerhalb des Regelintervalls. Bei hohen Stromaufnahmen ändert sich auch die Temperatur bereits meßbar durch die während der Messungen vom Prüfkörper aufgenommene elektrische Energie, die bis zu 10 VA ansteigt.

Frequenzabhängigkeit

In dem oben gewählten Ersatzschema liegt zum Kondensator ein Widerstand parallel, dessen Wert von der Frequenz unabhängig ist. Mithin müßte C_1 und $\operatorname{tg}\delta$ bei Änderung der Frequenz solche Werte annehmen, daß das Produkt $\omega C_1 \operatorname{tg}\delta$ konstant bleibt. Dies ist nur bei hohen Temperaturen angenähert der Fall, wie aus den Abb. 5, 6 und 7 hervorgeht. Diese Abbildungen enthalten neben den bereits oben gezeichneten Kurven bei $\omega = 314$ (50 Hz) die Meßwerte bei der Kreisfrequenz $\omega = 5000$, die mit einer Präzisionsmeßbrücke nach Giebe und Zickner erhalten wurden. Ungefähre Übereinstimmung der Widerstandswerte besteht bei Werkstoff V (Abb. 5) oberhalb etwa 250°, bei Werkstoff IV (Abb. 6) und VI (Abb. 7) erst bei 600°. Auffallend ist der stark abweichende Verlauf der Kurven bei Werkstoff VI (Abb. 7) zwischen 600

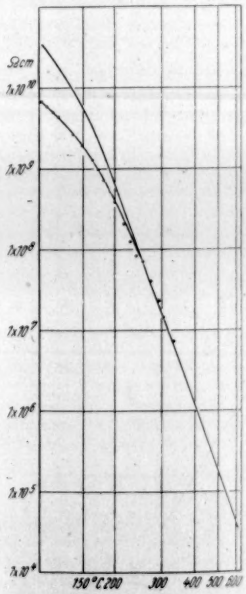


Abb. 5. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes bei $\omega = 5000$, Werkstoff V.

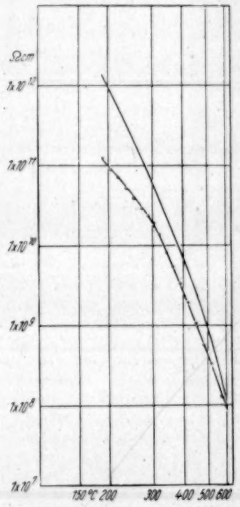


Abb. 6. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes bei $\omega = 5000$, Werkstoff IV.

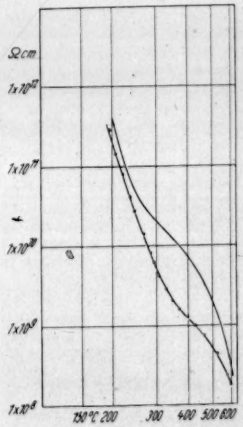


Abb. 7. Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes bei $\omega = 5000$, Werkstoff VI.

und 300°. Als Ergebnis der Untersuchung bei Tonfrequenz kann also festgestellt werden, daß das Ersatzschema nur in erster Annäherung gilt; die eigentlichen Verhältnisse im Isolierstoff sind wahrscheinlich sehr viel verwickelter[1)2)]. Trotzdem soll zunächst der reine Parallelwiderstand als bequemes Ersatzschema für den auftretenden dielektrischen Verlust beibehalten und zur Vereinheitlichung der Darstellungsweise benutzt werden. Es scheint, als ob unterhalb einer bestimmten Grenztemperatur eine zusätzliche Leitfähigkeit zur rein elektrolytischen hinzukommt. Diese Frage soll durch geplante Untersuchungen über den Leitungsmechanismus in keramischen Werkstoffen entschieden werden. Für technische Anwendungen ist die Angabe des spezifischen elektrischen Widerstandes sehr bequem und ausreichend genau, für besondere Zwecke muß die Größe der Dielektrizitätskonstanten und der Verlustfaktoren, die weniger vom gewählten Ersatzschema abhängig sind, angegeben werden. Zwar ist die in der Scheringbrücke gemessene Kapazität bei großen Verlustfaktoren zu korrigieren durch Division mit $1 + \mathrm{tg}^2\delta$, was einen Parallelwiderstand im Ersatzschema voraussetzt[3)4)5)6)7)], der Verlustfaktor selbst ist indessen von Voraussetzungen über das Zustandekommen des Verlustes im Kondensator frei. In den Abb. 8, 9 und 10 ist der Verlustfaktor, die Dielektrizitätskonstante und das Produkt $\varepsilon \cdot \mathrm{tg}\,\delta$, die Verlustziffer, die in dem gewählten Ersatzschema dem Widerstand umgekehrt proportional ist, im logarithmischen Maßstab über der wie bisher in Abszissenrichtung laufenden reziproken absoluten Temperatur aufgetragen. Die Messungen wurden bei Tonfrequenz ($\omega = 5000$) ausgeführt. Die Meßbrücke gestattete, den Verlustfaktor in sehr weiten Bereichen zu bestimmen; $\mathrm{tg}\,\delta$ betrug bei Werkstoff V bereits bei 200° etwa 0,6, bei 300° etwa 12.

Die $\mathrm{tg}\,\delta$-Kurve der Abb. 8 steigt mit der Temperatur zunächst wenig, dann sehr steil und schließlich nur noch langsam an, die ε-Kurve läuft durch ein Maximum ($\varepsilon = 13$) und ein Minimum ($\varepsilon = 3{,}6$) hindurch zu einem stark ansteigenden Teil. Die Kurve der Verlustziffer nimmt von diesem eigenartigen Verlauf der ε-Kurve keine Notiz, sondern fällt in einem sanften Bogen mit fallender Temperatur. Es darf

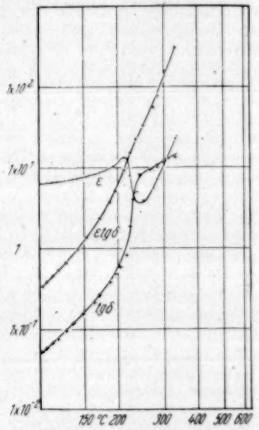


Abb. 8. Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften bei $\omega = 5000$, Werkstoff V.

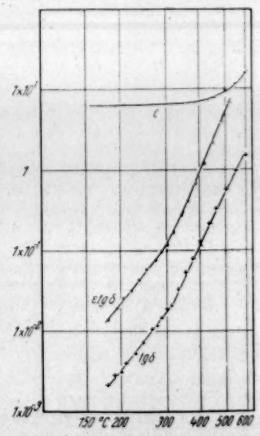


Abb. 9. Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften bei $\omega = 5000$, Werkstoff IV.

nicht unerwähnt bleiben, daß die Gestalt der ε-Kurve wesentlich beeinflußt wird durch die oben erwähnte Korrektur mit $1 + \mathrm{tg}^2\delta$, die Kurve der nicht korrigierten Vergleichskapazität der

1) P. Schupp, Wissensch. Veröffentl. aus dem Siemens-Konzern **17**, 1, 1938.
2) P. Böning, Zeitschr. f. techn. Phys. **19**, 241, 1939.
3) G. Benischke, Arch. f. Elektrotechn. **16**, 174, 1926.
4) G. Hauffe, Arch. f. Elektrotechn. **17**, 422, 1926.
5) W. Geyger, Arch. f. Elektrotechn. **17**, 423, 1926.
6) H. Schering, Arch. f. Elektrotechn. **17**, 426, 1926.
7) G. Benischke, Arch. f. Elektrotechn. **17**, 429, 1926.

Meßbrückenanordnung verläuft im ganzen Temperaturbereich monoton. Es kann also das Maximum und das Minimum der ε-Kurve nur ein

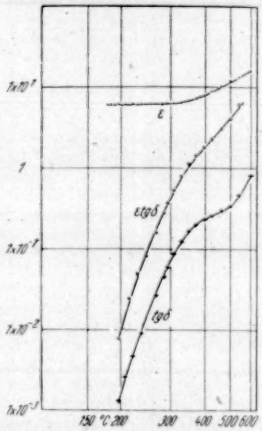


Abb. 10. Temperaturabhängigkeit der dielektrischen Eigenschaften bei $\omega = 5000$, Werkstoff VI.

Zeichen dafür sein, daß bei der betreffenden Temperatur beim Werkstoff V besondere Verhältnisse vorliegen. Die Lage der Extrema verschiebt sich mit der Frequenz. Auch hier muß die Klärung den geplanten Untersuchungen des Leitungsmechanismus überlassen werden. Die in Abb. 9 und 10 wiedergegebenen Abhängigkeiten der Dielektrizitätskonstanten, des dielektrischen Verlustfaktors und der Verlustziffer für die Sondermassen IV und VI sind wesentlich übersichtlicher. Abb. 9 zeigt monotonen Verlauf der ε-Kurve von etwa 6,5 bei 200° zu etwa 16 bei 600° und geradlinigen bzw. doppelt geradlinigen Verlauf von $\mathrm{tg}\,\delta$ von etwa 3×10^{-3} bei 200° zu 1,5 bei 600° und $\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta$ von 2×10^{-2} bei 200° zu 25 bei 600°. Bei Werkstoff VI (Abb. 10) haben die Kurven von $\mathrm{tg}\,\delta$ und $\varepsilon\,\mathrm{tg}\,\delta$ einige Wendepunkte in dem gewählten Darstellungsmaßstab, die Größenordnung der Meßwerte stimmt mit denen von Werkstoff IV überein.

Zusammenfassung

Es wird ein Verfahren für Isolationswiderstandsmessungen bei höheren Temperaturen mit Wechselströmen an keramischen Werkstoffen entwickelt, das Meßwerte liefert, die weitgehend unabhängig von der Art der Vorbehandlung, der Dauer der Beanspruchung, z. T. auch vom Elektrodenmaterial und bei geeigneten Erwärmungsgeschwindigkeiten auch unbeeinflußt von der jeweiligen Aufeinanderfolge der Meßtemperaturen bleiben. Der Wechselstromwiderstand in Abhängigkeit von der Temperatur kennzeichnet eindeutig das Isolationsvermögen der keramischen Materialien. Diese Werte sind im Gegensatz zu den mit Gleichspannung gemessenen zeitlich konstant.

Zur einheitlichen Darstellung der Ergebnisse werden Voraussetzungen über das Ersatzschema der Werkstoffe im elektrischen Feld gemacht, die sich in erster Näherung als erfüllt erweisen. Zur genaueren Beurteilung der Werkstoffe müssen bei geringen Leitfähigkeiten die Werte des dielektrischen Verlustfaktors und der Dielektrizitätskonstanten herangezogen werden. Das Produkt beider, die dielektrische Verlustziffer $\varepsilon \cdot \mathrm{tg}\,\delta$, hat erfahrungsgemäß einen übersichtlicheren Verlauf in Abhängigkeit von der Temperatur als die Faktoren allein.

Berlin-Charlottenburg, im August 1939.

(Eingegangen 21. August 1939)

Einfluß der Molekülform und frei drehbarer Dipolgruppen auf die dielektrische Relaxation

Von A. Budó

Zur Beschreibung des Verhaltens von Dipolmolekülen im hochfrequenten elektrischen Felde hat man die ursprüngliche Debyesche Theorie[1]), nach der die Moleküle als Kugeln angesehen werden können und als solche durch eine einzige Relaxationszeit charakterisierbar sind, nach zwei Richtungen hin verallgemeinert. Erstens wurde der Einfluß der Form des Moleküls untersucht, indem das Molekül als ein Ellipsoid betrachtet wird[2]), zweitens der Einfluß der Struktur des Moleküls, d. h. der Anwesenheit von polaren Gruppen, die sich im Molekül frei drehen können[3]). Das Ergebnis war in beiden Fällen das Auftreten von mehreren Relaxationszeiten, die mit den Reibungsgrößen des Moleküls bzw. der polaren Gruppen zusammenhängen; die Reibungsgrößen lassen sich aus den geometrischen Dimensionen der Moleküle berechnen bzw. in komplizierteren Fällen abschätzen.

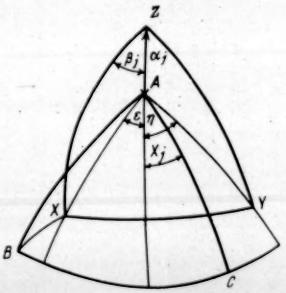
Der Vergleich dieser theoretischen Resultate mit den Messungen hat bei den untersuchten Molekülen — sowohl bezüglich der Form[4]) wie

1) P. Debye, Polare Molekeln. Leipzig 1929.
2) F. Perrin, Journ. Phys. (7) **5**, 497, 1934.
3) A. Budó, Physik. Zeitschr. **39**, 706, 1938.
4) A. Budó, E. Fischer und S. Miyamoto, Physik. Zeitschr. **40**, 337, 1939.

der Anwesenheit von drehbaren Gruppen[1]) – eine gute Übereinstimmung gegeben. Diese Moleküle entsprachen dabei ziemlich weitgehend den bei der theoretischen Ableitung benutzten Modellen. Diese Modelle waren einerseits: ellipsoidförmiges Molekül ohne drehbare Gruppen, andererseits: Moleküle mit drehbaren Gruppen, wobei aber bei den Drehungen, die das ganze Molekül ausführt, dieses als kugelförmig angesehen und außerdem die Drehachsen der Gruppen als parallel vorausgesetzt wurden. Für Moleküle von allgemeinerer Art, die eine starke Abweichung von der Kugelgestalt haben und außerdem drehbare Dipolgruppen mit Drehachsen verschiedener Orientierung besitzen, können die oben erwähnten Modelle nur eine rohe Näherung bedeuten. Im folgenden soll daher eine Verallgemeinerung in diesem Sinne gegeben werden, die also den Einfluß der Molekülform und der drehbaren Gruppen – vollkommen freie Drehbarkeit vorausgesetzt – gleichzeitig berücksichtigt.

Wir legen das folgende Modell zugrunde: Es sei eine beliebige Zahl von Drehgruppen vorhanden, deren Drehachsen beliebige, aber relativ zum Molekül unveränderliche Richtungen haben sollen[2]). Wir nehmen an, daß die Form des ganzen Moleküls als einigermaßen symmetrisch in bezug auf drei zueinander senkrechte Achsen XYZ angesehen werden kann. Das Molekül habe in bezug auf das Koordinatensystem XYZ ein festes Dipolmoment μ' und bewegliche Momente μ'_j. Letztere zerlegen wir in je zwei Komponenten: parallel (μ''_j) und senkrecht (μ_j) zu den entsprechenden Drehachsen. Dann können wir die Momente μ''_j mit dem festen Moment μ' zu einem einzigen festen Moment μ zusammensetzen und wir haben noch Momente μ_j, die alle auf den entsprechenden Drehachsen senkrecht stehen.

Da wir alle Wechselwirkungskräfte zwischen den Momenten vernachlässigen, kommt es bei uns nicht auf die Lokalisierung der Momente, sondern nur auf die Richtung derselben an. Wir können diese im Koordinatensystem XYZ folgendermaßen angeben. Das feste Moment μ (vektoriell geschrieben $\mathfrak{m}$) sei durch seine Komponenten μ_a, μ_b, μ_c bestimmt, das bewegliche Moment μ_j (vektoriell $\mathfrak{m}_j$) hingegen durch die Winkel α_j, β_j, welche die Lage der j-ten Drehachse angeben und den Drehwinkel χ_j. (Vgl. die Figur, in der wegen der späteren Ausführungen und der Übersichtlichkeit halber nur die sphärischen Dreiecke XYZ und ABC – alle Seiten und Winkel derselben sind $\frac{\pi}{2}$ – gezeichnet sind. Ist O der Mittelpunkt der Kugel, so liegt die j-te Drehachse in der Richtung von OA, das Moment μ_j in der Richtung von OC.) Zur Beschreibung der Lage des körperfesten XYZ-Systems relativ zu einem raumfesten System $X'Y'Z'$ benutzen wir die Eulerschen Winkel ϑ, ψ, φ (ϑ ist der Winkel zwischen Z und Z'-Achse, ψ der Winkel zwischen der X'-Achse und der Knotenlinie, φ der Winkel zwischen der Knotenlinie und der X-Achse). Das Feld $F = F_0\, e^{i\omega t}$ habe die Richtung der Z'-Achse.



Die Aufgabe ist zunächst die Bestimmung der Verteilungsfunktion f aus der Differentialgleichung

$$\Delta N_1 + \Delta N_2 = \frac{\partial f}{\partial t}\,\delta t\, dV\,,$$

(hinsichtlich der Bezeichnungen und ausführlicherer Angaben sei auf die zitierte Arbeit des Verfassers verwiesen), die wir mit den gewählten Koordinaten formal so schreiben können:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} = {} & \overline{\frac{\Delta_\vartheta}{\delta t}}\,\frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \overline{\frac{\Delta_\varphi}{\delta t}}\,\frac{\partial f}{\partial \varphi} + \overline{\frac{\Delta_{\chi_j}}{\delta t}}\,\frac{\partial f}{\partial \chi_j} + \overline{\frac{\Delta_\vartheta^2}{2\,\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta^2} + \overline{\frac{\Delta_\varphi^2}{2\,\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \overline{\frac{\Delta_{\chi_j}^2}{2\,\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \chi_j^2} + \overline{\frac{\Delta_\vartheta \Delta_\varphi}{\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta\,\partial \varphi} \\ & + \overline{\frac{\Delta_\vartheta \Delta_{\chi_j}}{\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta\,\partial \chi_j} + \overline{\frac{\Delta_\varphi \Delta_{\chi_j}}{\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi\,\partial \chi_j} - \frac{1}{\sin\vartheta}\,\frac{\partial}{\partial \vartheta}\,(f \sin\vartheta\,\dot{\vartheta}) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\,(f\dot{\varphi}) - \frac{\partial}{\partial \chi_j}\,(f\dot{\chi}_j)\,.\end{aligned} \tag{1}$$

1) E. Fischer und F. C. Frank, Physik. Zeitschr. **40**, 345, 1939.

2) Mit Molekülen, deren Drehachsensystem im Molekül sich mit der Zeit ändert, beschäftigen wir uns nicht, da man bei solchen kaum mehr von einer bestimmten konstanten Gestalt sprechen kann. Beispiele für beide Klassen findet man bei C. T. Zahn, Physik. Zeitschr. **33**, 400, 1932.

Hier bedeuten $\overline{\frac{\Delta_\vartheta}{\delta t}} \ldots \overline{\frac{\Delta_\varphi \Delta_{\chi_j}}{\delta t}}$ noch zu bestimmende Größen; $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\chi}_j$ sind Winkelgeschwindigkeiten, mit denen sich unser Momentsystem infolge der richtenden Feldstärke dreht. (Wir haben vorläufig nur die j-te Drehgruppe in Betracht gezogen und die Tatsache berücksichtigt, daß wegen der Rotationssymmetrie um die Z'-Achse eine Abhängigkeit von der Koordinate ψ nicht auftritt.)

Zur Berechnung von $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\chi}_j$ benutzen wir die Verallgemeinerung der Beziehung, nach der die Winkelgeschwindigkeit dem Drehmoment proportional ist: $w = \frac{M}{\varrho}$ (ϱ = Reibungsgröße). Da wegen der vorausgesetzten vollkommen freien Drehbarkeit die j-te Gruppe unabhängig von den übrigen Teilen des Moleküls um die j-te Drehachse rotiert, ist es naheliegend, das Drehmoment $[\mathfrak{m}_j \mathfrak{F}]$ in zwei Komponenten zu zerlegen, deren eine, M_{ja}, in der Richtung der j-ten Drehachse liegt, die andere darauf senkrecht steht. Die Winkelgeschwindigkeit der Gruppe um die j-te Achse berechnen wir dann nach der Gleichung

$$\dot{\chi}_j = \frac{M_{ja}}{\varrho_j}, \qquad (2)$$

wo ϱ die Reibungsgröße der j-ten Gruppe bedeutet. Die andere Komponente von $[\mathfrak{m}_j \mathfrak{F}]$ stellen wir als die Vektorsumme dreier Vektoren M_{jx}, M_{jy}, M_{jz} dar (die die Richtungen der Achsen XYZ haben) und benutzen die Beziehungen

$$w_{jx} = \frac{M_{jx}}{\varrho_a}; \quad w_{jy} = \frac{M_{jy}}{\varrho_b}; \quad w_{jz} = \frac{M_{jz}}{\varrho_c}. \qquad (3)$$

Die Konstanten ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c beziehen sich – wegen der starren Verbindung der j-ten Drehachse mit dem Molekül – auf die Drehung des ganzen Moleküls; kann man dieses z. B. als ein Ellipsoid betrachten, so sind für diese Reibungsgrößen die Perrinschen Werte einzusetzen. Schließlich zerlegen wir das auf das feste Moment $\mathfrak{m}$ wirkende Drehmoment $[\mathfrak{m}\mathfrak{F}]$ in drei Komponenten M_{0x}, M_{0y}, M_{0z} und berechnen die davon herrührenden Winkelgeschwindigkeiten aus den Gleichungen:

$$w_{ox} = \frac{M_{ox}}{\varrho_a}; \quad w_{oy} = \frac{M_{oy}}{\varrho_b}; \quad w_{oz} = \frac{M_{oz}}{\varrho_c}. \qquad (4)$$

Es sei jedoch bemerkt, daß die Konstanten ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c im allgemeinen mit den früheren [in der Gleichung (3)] nicht genau gleich sind, da das Drehmoment $[\mathfrak{m}\mathfrak{F}]$ an dem Molekülrumpf angreift und dieser bei seiner Drehung die Gruppe nicht vollständig mitnimmt. Dasselbe gilt auch, wenn das Molekül mehrere Drehgruppen besitzt. In einer Näherung, deren Güte von der speziellen Struktur des Moleküls abhängt, kann aber angenommen werden, daß man die Reibungsverhältnisse bei den resultierenden Drehungen um die X, Y, Z-Achsen durch Reibungsgrößen ϱ_a, ϱ_b, ϱ_c charakterisieren kann, deren Größe sich wenigstens abschätzen läßt. In einigen Fällen ist diese Abschätzung besonders einfach. Besitzt z. B. das Molekül die Drehgruppen 1, 2, 3, deren Achsen der Reihe nach mit den Richtungen von X, Y, Z zusammenfallen, so muß man bei der Abschätzung (bzw. Berechnung bei einer regelmäßigen Form) von ϱ_a das ganze Molekül außer der Gruppe 1, von ϱ_b das ganze Molekül außer der Gruppe 2 und schließlich bei der Abschätzung von ϱ_c das ganze Molekül außer der Gruppe 3 berücksichtigen. Auf diesen speziellen Fall kommen wir noch unten zurück.

Zur Kenntnis der Winkelgeschwindigkeiten müssen wir nach den Gleichungen (2)–(4) die Drehmomente berechnen. Die Komponenten der Feldstärke bezüglich des XYZ-Systems seien F_x, F_y, F_z. Dann folgt für die Komponente M_{ja} des Drehmomentes $[\mathfrak{m}_j \mathfrak{F}]$ (vgl. die Figur):

$$M_{ja} = \mu_j \left[-F_x \sin(AX) \sin(\varepsilon + \chi_j) + F_y \sin(AY) \sin(\eta - \chi_j) + F_z \sin \alpha_j \sin \chi_j \right].$$

Nun ist nach elementaren Sätzen der sphärischen Trigonometrie

$$\sin(AX)\cos\varepsilon = \cos\alpha_j \cos\beta_j; \qquad \sin(AX)\sin\varepsilon = \sin\beta_j;$$

$$\sin(AY)\cos\eta = \cos\alpha_j \sin\beta_j; \qquad \sin(AY)\sin\eta = \cos\beta_j;$$

somit gilt für M_{ja}:

$$M_{ja} = -\mu_j \left\{ (F_x \sin\beta_j - F_y \cos\beta_j)\cos\chi_j + \left[(F_x \cos\beta_j + F_y \sin\beta_j)\cos\alpha_j - F_z \sin\alpha_j \right] \sin\chi_j \right\} \qquad (5)$$

Die andere Komponente von $[m_j \mathfrak{F}]$ ist

$M_{jb} = \mu_j \left[F_x \cos(AX) + F_y \cos(AY) + F_z \cos\alpha_j \right]$.

Diese Komponente hat die Richtung der Achse OB. Man ermittelt wieder nach den Sätzen der sphärischen Trigonometrie die drei Richtungscosinus $\cos(BX)$, $\cos(BY)$, $\cos(BZ)$, sowie $\cos(AX)$ und $\cos(AY)$. Dann findet man für die

Projektionen von M_{jb} auf die Achsen X, Y, Z die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} M_{jx} &= \mu_j\left[(F_x\cos\beta_j + F_y\sin\beta_j)\sin\alpha_j + F_z\cos\alpha_j\right](\sin\beta_j\cos\chi_j + \cos\alpha_j\cos\beta_j\sin\chi_j);\\ M_{jy} &= -\mu_j\left[(F_x\cos\beta_j + F_y\sin\beta_j)\sin\alpha_j + F_z\cos\alpha_j\right](\cos\beta_j\cos\chi_j - \cos\alpha_j\sin\beta_j\sin\chi_j);\\ M_{jz} &= -\mu_j\left[(F_x\cos\beta_j + F_y\sin\beta_j)\sin\alpha_j + F_z\cos\alpha_j\right]\sin\alpha_j\sin\chi_j\,. \end{aligned}\right| \quad (6)$$

Schließlich ist

$$\left.\begin{aligned} M_{ox} &= \mu_b F_z - \mu_c F_y;\\ M_{oy} &= \mu_c F_x - \mu_a F_z;\\ M_{oz} &= \mu_a F_y - \mu_b F_x. \end{aligned}\right| \quad (7)$$

Die Winkelgeschwindigkeiten um die Achsen X, Y, Z, bzw. A ergeben sich nach den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} w_x &= \frac{1}{\varrho_a}(M_{ox} + M_{jx});\\ w_y &= \frac{1}{\varrho_b}(M_{oy} + M_{jy});\\ w_z &= \frac{1}{\varrho_c}(M_{oz} + M_{jz}), \end{aligned}\right| \quad (8)$$

bzw. nach der Gleichung (2). Drücken wir in diesen Gleichungen die Komponenten der Feldstärke F durch die Eulerschen Winkel aus:

$$F_x = F\sin\vartheta\sin\varphi; \qquad F_y = F\sin\vartheta\cos\varphi;$$
$$F_z = F\cos\vartheta,$$

benutzen wir die bekannten Beziehungen

$$\dot{\vartheta} = w_x\cos\varphi - w_y\sin\varphi;$$
$$\dot{\varphi} = w_z - (w_x\sin\varphi + w_y\cos\varphi)\operatorname{ctg}\vartheta$$

und führen wir der Abkürzung halber statt der Reibungsgrößen $\varrho_a, \ldots, \varrho_j$ ihre reziproken Werte

$$\frac{1}{\varrho_a} = r_a; \quad \frac{1}{\varrho_b} = r_b; \quad \frac{1}{\varrho_c} = r_c; \quad \frac{1}{\varrho_j} = r_j \quad (9)$$

ein, so erhalten wir für $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\chi}_j$ die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vartheta} = F\Big\{&\mu_a r_b\cos\vartheta\sin\varphi + \mu_b r_a\cos\vartheta\cos\varphi - \mu_c\sin\vartheta\,(r_a\cos^2\varphi + r_b\sin^2\varphi)\\ &+ \mu_j\left[\cos\alpha_j\cos\vartheta + \sin\alpha_j\sin\vartheta\sin(\beta_j+\varphi)\right]\left[(r_a\sin\beta_j\cos\varphi + r_b\cos\beta_j\sin\varphi)\cos\chi_j\right.\\ &\left.+ (r_a\cos\beta_j\cos\varphi - r_b\sin\beta_j\sin\varphi)\cos\alpha_j\sin\chi_j\right]\Big\};\\ \dot{\varphi} = F\Big\{&\mu_a\left(r_b\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} + r_c\sin\vartheta\right)\cos\varphi - \mu_b\left(r_a\frac{\cos^2\vartheta}{\sin\vartheta} + r_c\sin\vartheta\right)\sin\varphi + \mu_j(r_a - r_b)\cos\vartheta\sin\varphi\cos\varphi\\ &- \mu_j\left[\cos\alpha_j\cos\vartheta + \sin\alpha_j\sin\vartheta\sin(\beta_j+\varphi)\right]\Big\{\operatorname{ctg}\vartheta(r_a\sin\beta_j\sin\varphi - r_b\cos\beta_j\cos\varphi)\cos\chi_j\\ &+ \left[\cos\alpha_j\operatorname{ctg}\vartheta\,(r_b\sin\beta_j\cos\varphi + r_a\cos\beta_j\sin\varphi) + r_c\sin\alpha_j\right]\sin\chi_j\Big\}\Big\};\\ \dot{\chi}_j = F\mu_j r_j\Big\{&\sin\vartheta\cos(\beta_j+\varphi)\cos\chi_j + \left[\sin\alpha_j\cos\vartheta - \cos\alpha_j\sin\vartheta\sin(\beta_j+\varphi)\right]\sin\chi_j\Big\}. \end{aligned}\right| \quad (10)$$

Wir tragen diese Werte in die Differentialgleichung (1) ein.

Zu dem angegebenen Ausdruck von $\dot{\chi}_j$ wäre noch ein Glied zu addieren, da sich der Winkel χ_j nicht nur wegen der Drehung der Gruppe, sondern auch wegen der Drehung des Molekülrumpfes ändert. Eine strenge Berücksichtigung dieser Tatsache ist in dem von uns betrachteten allgemeinen Fall kaum möglich. Wir führen deshalb die Rechnungen mit den oben angegebenen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\vartheta}$, $\dot{\varphi}$, $\dot{\chi}_j$ durch und betrachten zum Schluß noch kurz den weniger allgemeinen Fall, in dem nur solche Drehgruppen vorhanden sind, deren Achsen mit den Achsen X, Y, Z zusammenfallen.

Zur Bestimmung der Schwankungen $\overline{\frac{\Delta\vartheta}{\delta t}}$ usw. berechnen wir zunächst die potentielle Energie unseres Momentsystems. Für diese findet man:

$$\left.\begin{aligned} u = -F\,[\mu\cos(\mu,F) + \mu_j\cos(\mu_j,F)] = -F\Big\{&\mu_a\sin\vartheta\sin\varphi + \mu_b\sin\vartheta\cos\varphi + \mu_c\cos\vartheta \\ &+ \mu_j\left[\sin\vartheta\cos(\beta_j+\varphi)\sin\chi_j - (\sin\alpha_j\cos\vartheta - \cos\alpha_j\sin\vartheta\sin(\beta_j+\varphi))\cos\chi_j\right]\Big\} \end{aligned}\right| \quad (11)$$

Der Ausdruck $f = e^{-\frac{u}{kT}}$ muß im statischen Fall $\left(\frac{\partial f}{\partial t} = o\right)$ der Gleichung (1) genügen. Führen wir die Rechnungen aus und setzen die Koeffizienten von $\mu_a, \ldots \mu_j, \mu_a^2, \ldots \mu_j^2, \mu_a\mu_b, \ldots \mu_c\mu_j$ alle gleich o, dann ergeben sich eindeutig aus dem so entstandenen Gleichungssystem nach langwierigen Rechnungen für die Schwankungen die folgenden Werte:

$$\left.\begin{aligned} \overline{\frac{\Delta_\vartheta}{\delta t}} &= kT\operatorname{ctg}\vartheta\,(r_a\sin^2\varphi + r_b\cos^2\varphi) \\ \overline{\frac{\Delta_\varphi}{\delta t}} &= kT\,(r_a - r_b)\left[1 + 2\operatorname{ctg}^2\vartheta\right]\sin\varphi\cos\varphi \\ \overline{\frac{\Delta_{\chi_j}}{\delta t}} &= 0 \\ \overline{\frac{\Delta_\vartheta^2}{2\,\delta t}} &= kT\,(r_a\cos^2\varphi + r_b\sin^2\varphi) \\ \overline{\frac{\Delta_\varphi^2}{2\,\delta t}} &= kT\left[r_c + \operatorname{ctg}^2\vartheta\,(r_a\sin^2\varphi + r_b\cos^2\varphi)\right] \\ \overline{\frac{\Delta_{\chi_j}^2}{2\,\delta t}} &= kT\cdot r_j \\ \overline{\frac{\Delta_\vartheta\Delta_\varphi}{\delta t}} &= 2\,kT\,(r_b - r_a)\operatorname{ctg}\vartheta\sin\varphi\cos\varphi \\ \overline{\frac{\Delta_\vartheta\Delta_{\chi_j}}{\delta t}} &= kT\cdot\sin\alpha_j(r_b\sin\beta_j\sin\varphi - r_a\cos\beta_j\cos\varphi) \\ \overline{\frac{\Delta_\varphi\Delta_{\chi_j}}{\delta t}} &= kT\left[\operatorname{ctg}\vartheta\sin\alpha_j(r_a\cos\beta_j\sin\varphi + r_b\sin\beta_j\cos\varphi) - r_c\cos\alpha_j\right]. \end{aligned}\right| \quad (12)$$

Damit haben wir die Form der Differentialgleichung (1) bestimmt.

Wir versuchen die Gleichung (1) durch den Ansatz zu lösen:

$$\left.\begin{aligned} f = 1 + \frac{F_0 e^{i\omega t}}{kT}\Big\{&x_a\mu_a\sin\vartheta\sin\varphi + x_b\mu_b\sin\vartheta\cos\varphi + x_c\mu_c\cos\vartheta \\ &+ \mu_j\left[\left[\sin\vartheta\,(y_1\cos\beta_j\cos\varphi - y_2\sin\beta_j\sin\varphi) + y_6\cos\vartheta\sin\alpha_j\cos\alpha_j\sin\beta_j\cos\beta_j\right]\sin\chi_j\right. \\ &\left.- \left[y_3\cos\vartheta\sin\alpha_j - \sin\vartheta\cos\alpha_j\,(y_4\sin\beta_j\cos\varphi + y_5\cos\beta_j\sin\varphi)\right]\cos\chi_j\right]\Big\}, \end{aligned}\right| \quad (13)$$

dessen Form – bis auf das Glied mit der Konstante y_6 – durch den Ausdruck für die potentielle Energie [s. Gleichung (11)] nahegelegt ist. Die Konstanten $x_a, \ldots y_6$ lassen sich bestimmen, wenn wir uns auf nicht zu große Feldstärken beschränken, d. h. nur die erste Potenz von F berücksichtigen. Dann ergeben sich für die Größen x Ausdrücke von der Form

$$x_a = \frac{1}{1 + i\omega\tau_a}, \quad (14)$$

usw. [die Werte von τ gibt die spätere

Gleichung (20)], während wir für die Größen y ein lineares Gleichungssystem erhalten, das wir mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} y_1 - 1 &= z_1\,; \quad \ldots\,; \\ y_5 - 1 &= z_5\,; \quad y_6 = z_6\,, \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} r_a + r_b + r_f + \frac{i\omega}{kT} &= R_c\,; \\ r_b + r_c + r_f + \frac{i\omega}{kT} &= R_a\,; \\ r_c + r_a + r_f + \frac{i\omega}{kT} &= R_b \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

folgendermaßen schreiben können:

$$\left.\begin{aligned} R_b z_1 - r_a \sin^2\alpha_j z_3 - r_c \cos^2\alpha_j z_5 &= -\frac{i\omega}{kT} \\ R_a z_2 - r_b \sin^2\alpha_j z_3 - r_c \cos^2\alpha_j z_4 &= -\frac{i\omega}{kT} \\ R_c z_3 - r_a \cos^2\beta_j z_1 - r_b \sin^2\beta_j z_2 &= -\frac{i\omega}{kT} \\ R_b z_4 - r_c z_2 - r_a \sin^2\alpha_j \cos^2\beta_j z_6 &= -\frac{i\omega}{kT} \\ R_a z_5 - r_c z_1 + r_b \sin^2\alpha_j \sin^2\beta_j z_6 &= -\frac{i\omega}{kT} \\ R_c z_6 - r_a z_4 + r_b z_5 &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Die Auflösung ergibt:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= -\frac{i\omega}{kT}\cdot\frac{1}{D}\left[R_a R_c + R_a r_a \sin^2\alpha_j + R_c r_c \cos^2\alpha_j + r_b (r_a - r_b)\sin^2\alpha_j \sin^2\beta_j\right] \\ z_2 &= -\frac{i\omega}{kT}\cdot\frac{1}{D}\left[R_b R_c + R_b r_b \sin^2\alpha_j + R_c r_c \cos^2\alpha_j + r_a (r_b - r_a)\sin^2\alpha_j \cos^2\beta_j\right] \\ z_3 &= -\frac{i\omega}{kT}\cdot\frac{1}{D}\left[R_a R_b + R_a r_a \cos^2\beta_j + R_b r_b \sin^2\beta_j + r_c \cos^2\alpha_j (r_a \cos^2\beta_j + r_b \sin^2\beta_j - r_c)\right] \\ z_4 &= -\frac{i\omega}{kT}\cdot\frac{1}{D}\left[R_a R_c + R_c r_c - r_b \sin^2\alpha_j (r_a \cos^2\beta_j + r_b \sin^2\beta_j - r_c)\right] \\ z_5 &= -\frac{i\omega}{kT}\cdot\frac{1}{D}\left[R_b R_c + R_c r_c - r_a \sin^2\alpha_j (r_a \cos^2\beta_j + r_b \sin^2\beta_j - r_c)\right] \\ z_6 &= -\frac{i\omega}{kT}\cdot\frac{1}{D}\left[R_a r_a - R_b r_b + (r_a - r_b) r_c\right] \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

mit

$$D = R_a R_b R_c - R_a r_a^2 \sin^2\alpha_j \cos^2\beta_j - R_b r_b^2 \sin^2\alpha_j \sin^2\beta_j - R_c r_c^2 \cos^2\alpha_j\,.$$

Damit ist die Verteilungsfunktion f bekannt.

Das mittlere Moment ergibt sich nun nach der Formel

$$\overline{m} = \frac{\int \left[\mu\cos(\mu, F) + \mu_j \cos(\mu_j, F)\right] f\, dV}{\int f\, dV}$$

[vgl. die Gleichung (11)] zu

$$\overline{m} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{3kT}\left\{\mu_a^2 x_a + \mu_b^2 x_b + \mu_c^2 x_c + \mu_f^2\left[1 + \tfrac{1}{2}(z_1\cos^2\beta_j + z_2\sin^2\beta_j + z_3\sin^2\alpha_j + z_4\cos^2\alpha_j\sin^2\beta_j + z_5\cos^2\alpha_j\cos^2\beta_j)\right]\right\}.$$

Es zeigt sich, daß der Faktor von μ_f^2 in dieser Gleichung im allgemeinen nicht genau auf die Gestalt $\frac{1}{1 + i\omega\tau}$ gebracht werden kann; dieses ist nur in einigen speziellen Fällen möglich (z. B. wenn $r_a = r_b = r_c$ ist). Man kann aber — wie eine Abschätzung zeigt[1]) — bei den üblichen

1) $\frac{\omega}{kT} : r_j = \omega\frac{\varrho_j}{kT} = 2\omega\tau$, wo τ eine Relaxationszeit für ein Molekül bedeutet, das die gleiche Größe wie die Gruppe hat. Das Verhältnis $2\omega\tau : 1$ beträgt z. B. bei 3 m Wellenlänge und $\tau = 10^{-11}$ sec etwa $\frac{1}{10}$. Da außer r_j noch zwei andere reziproke Reibungsgrößen in R_a, R_b, R_c vorkommen, ist der Fehler wegen der Vernachlässigung von $\frac{i\omega}{kT}$ noch geringer.

Meßfrequenzen das Glied $\frac{i\omega}{kT}$ in den Ausdrücken von R_a, R_b, R_c [s. Gleichung (16)] vernachlässigen. Dann wird der Faktor von μ_j^2 die Form $1 - \frac{i\omega}{kT} A$ haben, wo A von der Frequenz nicht abhängt. Da $\frac{1}{1 + i\omega\tau_j} \approx 1 - i\omega\tau_j$ ist, können wir die Größe $\frac{A}{kT}$ als eine Relaxationszeit auffassen und den Faktor von μ_j^2 in der üblichen Form $\frac{1}{1 + i\omega\tau_j}$ schreiben. Den expliziten Wert von τ_j gibt die Gleichung (21) wieder.

Wir haben bisher der Kürze halber nur der j-ten Gruppe Rechnung getragen. Das Vorhandensein beliebig orientierter weiterer Gruppen bringt keine Schwierigkeiten, da in unserer Darstellung die Lage der j-ten Drehachse nicht ausgezeichnet wurde. Gleichungen, die sich nur auf die j-te Gruppe beziehen, gelten auch für die weiteren Gruppen; in den übrigen bisherigen Gleichungen müssen wir über j summieren. Ausnahmen bildet die Gleichung (1), in der auch Glieder von der Form

$$\overline{\frac{\Delta_{\chi_j}\Delta_{\chi_k}}{\delta t}}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\chi_j\partial\chi_k}$$

vorkommen und die Bestimmungsgleichungen für die Schwankungen, die Glieder mit $\mu_j\mu_k$ enthalten. Man kann aus diesen Gleichungen die Schwankungen $\overline{\frac{\Delta_{\chi_j}\Delta_{\chi_k}}{\delta t}}$ berechnen, diese haben aber keinen Einfluß, weil aus der entsprechenden Erweiterung der Gleichung (13) die Beziehung $\frac{\partial^2 f}{\partial\chi_j\partial\chi_k} = 0$ folgt.

Es gilt demnach für das mittlere Moment eines Moleküls mit n drehbaren Gruppen die Beziehung:

$$\overline{m} = \frac{F_0 e^{i\omega t}}{3kT}\left[\frac{\mu_a^2}{1 + i\omega\tau_a} + \frac{\mu_b^2}{1 + i\omega\tau_b} + \frac{\mu_c^2}{1 + i\omega\tau_c} + \sum_{j=1}^{n}\frac{\mu_j^2}{1 + i\omega\tau_j}\right], \tag{19}$$

in der die Relaxationszeiten τ durch die Gleichungen definiert sind:

$$\tau_a = \frac{1}{kT}\,\frac{1}{r_b + r_c}; \qquad \tau_b = \frac{1}{kT}\,\frac{1}{r_c + r_a}; \qquad \tau_c = \frac{1}{kT}\,\frac{1}{r_a + r_b}; \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}\tau_j = \frac{1}{2kT}\,&\frac{(r_a + r_b + r_j)(r_a + r_b + 4r_c + 2r_j)}{(r_a + r_b + r_j)(r_b + r_c + r_j)(r_c + r_a + r_j)}\\ &+ \sin^2\alpha_j\Big\{\big[2r_c + r_j + r_0\sin^2\alpha_j\big]r_0 + 2\big[r_a(r_c - r_a)\cos^2\beta_j + r_b(r_c - r_b)\sin^2\beta_j + (r_c - r_a)(r_c - r_b)\big]\Big\}\\ &- r_a^2(r_b + r_c + r_j)\sin^2\alpha_j\cos^2\beta_j - r_b^2(r_c + r_a + r_j)\sin^2\alpha_j\sin^2\beta_j - r_c^2(r_a + r_b + r_j)\cos^2\alpha_j\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

mit der Abkürzung[1])

$$r_0 = r_a\cos^2\beta_j + r_b\sin^2\beta_j - r_c.$$

Auf die Bedeutung und Abschätzung der reziproken Reibungsgrößen r_a, r_b, r_c, r_j wurde schon hingewiesen.

Der Ausdruck (21) für τ_j vereinfacht sich wesentlich, wenn die j-te Drehachse mit einer der Achsen X, Y, Z zusammenfällt (d. h. wenn die Achsen X, Y, Z so gewählt werden können, daß die eine von ihnen in der Richtung der j-ter Drehachse liegt). Wir können aber, wie schon bemerkt, diesen Fall genauer behandeln, einerseits wegen der Möglichkeit der exakten Berechnung von $\overline{\chi_j}$, andererseits, weil man in diesem Fall die Reibungsgrößen r_a, r_b, r_c besser definieren kann. Wir nehmen an, es seien drei Drehgruppen vorhanden, die Drehachsen der Gruppen 1, 2, 3 sollen der Reihe nach mit den Achsen X, Y, Z zusammenfallen. Wir haben dann für die Gruppe 1 $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_1 = 0$, für die Gruppe 2 $\alpha_2 = \frac{\pi}{2}$, $\beta_2 = \frac{\pi}{2}$, für die Gruppe 3 $\alpha_3 = 0$, $\beta_3 = 0$ zu setzen. Zur Berücksichtigung der Drehung des

[1]) Man kann den Zähler von τ_j in der Gleichung (21) symmetrischer schreiben:

$$\begin{aligned}&(r_b + r_c + r_j)(r_b + r_c + 4r_a + 2r_j)\sin^2\alpha_j\cos^2\beta_j + (r_c + r_a + r_j)(r_c + r_a + 4r_b + 2r_j)\sin^2\alpha_j\sin^2\beta_j\\ &+ (r_a + r_b + r_j)(r_a + r_b + 4r_c + 2r_j)\cos^2\alpha_j - (r_a - r_b)^2\sin^2\alpha_j\sin^2\beta_j\cos^2\beta_j\\ &- [(r_a - r_c)\cos^2\beta_j + (r_b - r_c)\sin^2\beta_j]^2\sin^2\alpha_j\cos^2\alpha_j.\end{aligned}$$

Molekülrumpfes addieren wir jetzt zu den in der Gleichung (10) gegebenen Winkelgeschwindigkeiten $\dot{\chi}_1$, $\dot{\chi}_2$, $\dot{\chi}_3$ der Reihe nach die Winkelgeschwindigkeiten $-w_{0x}$, $-w_{0y}$, $-w_{0z}$ [vgl. Gleichung (4)], so daß die $\dot{\chi}_j$ in diesem Fall folgende Gestalt annehmen:

$$\dot{\chi}_1 = F\left[\mu_1 r_1 (\sin\vartheta\cos\varphi\cos\chi_1 + \cos\vartheta\sin\chi_1) - \mu_b r_a \cos\vartheta + \mu_c r_a \sin\vartheta\cos\varphi\right]$$

$$\dot{\chi}_2 = F\left[\mu_2 r_2 (-\sin\vartheta\sin\varphi\cos\chi_2 + \cos\vartheta\sin\chi_2) + \mu_a r_b \cos\vartheta - \mu_c r_b \sin\vartheta\sin\varphi\right]$$

$$\dot{\chi}_3 = F\sin\vartheta\left[\mu_3 r_3 (\cos\varphi\cos\chi_3 - \sin\varphi\sin\chi_3) - \mu_a r_c \cos\varphi + \mu_b r_c \sin\varphi\right].$$

Für die Schwankungen ergeben sich teilweise andere Werte als in der Gleichung (12), und zwar

$$\frac{\overline{\Delta_{\chi_1}^2}}{2\,\delta t} = kT(r_a + r_1); \qquad \frac{\overline{\Delta_\vartheta \Delta_{\chi_1}}}{\delta t} = -2kT r_a \cos\varphi; \qquad \frac{\overline{\Delta_\varphi \Delta_{\chi_1}}}{\delta t} = 2kT r_a \operatorname{ctg}\vartheta \sin\varphi,$$

$$\frac{\overline{\Delta_{\chi_2}^2}}{2\,\delta t} = kT(r_b + r_2); \qquad \frac{\overline{\Delta_\vartheta \Delta_{\chi_2}}}{\delta t} = 2kT r_b \sin\varphi; \qquad \frac{\overline{\Delta_\varphi \Delta_{\chi_2}}}{\delta t} = 2kT r_b \operatorname{ctg}\vartheta \cos\varphi,$$

$$\frac{\overline{\Delta_{\chi_3}^2}}{2\,\delta t} = kT(r_c + r_3); \qquad \frac{\overline{\Delta_\vartheta \Delta_{\chi_3}}}{\delta t} = 0; \qquad \frac{\overline{\Delta_\varphi \Delta_{\chi_3}}}{\delta t} = -2kT r_c.$$

Man erhält als Endresultat für die Relaxationszeiten der Gruppen die Ausdrücke:

$$\tau_1 = \frac{1}{kT}\,\frac{1}{\dfrac{r_b + 4r_a + r_1}{r_b + r_1} + \dfrac{r_c + 4r_a + r_1}{r_c + r_1}}; \qquad \tau_2 = \frac{1}{kT}\,\frac{1}{\dfrac{r_a + 4r_b + r_2}{r_a + r_2} + \dfrac{r_c + 4r_b + r_2}{r_c + r_2}};$$

$$\tau_3 = \frac{1}{kT}\,\frac{1}{\dfrac{r_a + 4r_c + r_3}{r_a + r_3} + \dfrac{r_b + 4r_c + r_3}{r_b + r_3}}. \tag{21'}$$

Die Relaxationszeit τ_1 läßt sich im Fall $r_b = r_c$ nicht nur für längere Wellen, sondern exakt definieren; entsprechendes gilt für τ_2 und τ_3.

Es sei noch bemerkt, daß in den Gleichungen (19)–(21), bzw. (21') die bisher abgeleiteten Formeln für das mittlere Moment als spezielle Fälle enthalten sind. Bei Fehlen drehbarer Gruppen erhalten wir zunächst die bekannten Perrinschen Formeln. Fallen ferner die Drehachsen der Gruppen alle in die Richtung z. B. der Z-Achse, ist außerdem $r_a = r_b = r$, dann reduziert sich τ_3 nach der Gleichung (21') zu $\frac{1}{kT}\,\frac{1}{r + r_3}$, und da jetzt μ_b (oder μ_a) gleich o gesetzt werden kann, gibt die Gleichung (19) die schon früher abgeleitete Formel wieder[1]).

Zusammenfassung

Es wird das mittlere Moment von Molekülen im hochfrequenten elektrischen Felde berechnet. Dabei wurde der allgemeine Fall betrachtet, in dem die Moleküle eine beliebige Zahl von frei drehbaren Gruppen besitzen, deren Drehachsen relativ zu einem molekülfesten Koordinatensystem beliebig, aber zeitlich unverändert orientiert sind. Gleichzeitige Berücksichtigung der Molekülform und der n drehbaren Gruppen ergibt, daß für nicht zu große Frequenzen das mittlere Dipolmoment im allgemeinen durch die Angabe von $n+3$ Relaxationszeiten bestimmt ist, deren Zusammenhang mit den $n+3$ Reibungsgrößen angegeben wird. Die bisher für die Formabhängigkeit bzw. für den Einfluß der drehbaren Gruppen gefundenen Beziehungen können als spezielle Fälle der in der vorliegenden Arbeit abgeleiteten Formel angesehen werden.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Debye für seine Anregung zu dieser Arbeit – deren Anfang auf meinen Aufenthalt in dem Max Planck-Institut zurückgeht – meinen herzlichen Dank aussprechen.

Budapest, Physikalisches Institut der Kgl. Ung. Universität für Technik und Wirtschaft.

(Eingegangen 27. Juni 1939)

1) A. Budó, a. a. O. siehe Gleichung (20).

Meßergebnisse mitteleuropäischer Erdbebenstationen und ihre physikalische Auswertung[1])

Von Gerhard Schmerwitz

Eine Erweiterung und Vertiefung unserer Kenntnisse über das Erdinnere und somit über die Erdkruste ist davon abhängig, wie weit exakte und moderne physikalische Meßverfahren zur Anwendung gebracht werden. Einen Einblick in dieses Hauptgebiet der Geophysik sollen hier zwei zur Zeit im Vordergrund stehende Probleme geben. Sie betreffen die Frage der Schichtung der Erdkruste und den elastischen Spannungszustand in dieser Kruste.

1. Die Schichtung der Erdkruste

Schichtungen oder genauer gesagt Schichtgrenzen in der Erdkruste lassen sich durch den Unterschied des Elastizitätsmoduls, der sich in der Fortpflanzungsgeschwindigkeit elastischer Wellen äußert, kennzeichnen. Auf dieser Grundlage ist, wenn man von der oberflächlichen unregelmäßigen und uneinheitlichen 2 km dicken Schicht absieht, in Mitteleuropa durch Nahbebenauswertungen eine Krustendicke von 50 km ermittelt worden. Für die Geschwindigkeit der longitudinalen elastischen Wellen in dieser Kruste hat sich ein Wert von 5,65 km/sec (im Mittel) herausgestellt. In 50 km Tiefe geht diese Geschwindigkeit sprunghaft auf den Wert von 8,0 km/sec über und nimmt von hier ab bis in sehr große Tiefen (2900 km, dem Erdkern) nur noch sehr langsam und stetig zu. Entsprechendes gilt für die Transversalwellen, die genau nach der Forderung der Theorie eine $\frac{1}{\sqrt{3}}$-fach kleinere Geschwindigkeit besitzen.

Die Kennzeichen und Unterschiede einer Kruste im Vergleich zum geschmolzenen Material, die uns bei Aggregatzuständen an der Erdoberfläche geläufig sind, wurden hier in der Tiefe bei den seismischen Aufschlüssen nicht vorgefunden. Man hätte nämlich, falls unterhalb der Kruste geschmolzenes Material also eine Flüssigkeit vorliegt, einen sprunghaften Übergang zu kleineren Geschwindigkeiten und außerdem überhaupt keine Transversalwellen finden dürfen.

Wenn in der schematisch vereinfachten Fig. 1 H der Ursprungsort der elastischen Wellen also der Herd des Bebens ist, so gehen von diesem direkt zu den einzelnen Stationen auf der Erdoberfläche Wellen, welche, falls sie longitudinal sind, mit $\overline{P}$ (transversal mit $\overline{S}$) bezeichnet werden. Ihre Laufzeit- bzw. Wegzeitkurve ist hier, wo wir alle Seismometerstationen in ein gerades Profil gelegt haben, eine Hyperbel: $t = \frac{\sqrt{A^2 + h^2}}{v}$.

A = Entfernung an der Oberfläche, h = Herdtiefe. Die Geschwindigkeit in der Schicht wird durch die Asymptote gegeben. Die Stationen werden nun aber auch von Wellen erreicht, die den Umweg über die untere Schicht gelaufen sind. Diese erreichen die Oberfläche sogar von einer gewissen Entfernung ab (etwa 160 km) früher als die direkten Strahlen. Ihre Bezeichnung ist P_n (bzw. S_n).

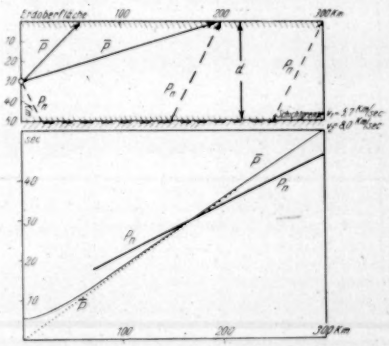


Fig. 1. Wege der Erdbebenwellen innerhalb der Erdkruste und zugehöriges Weg-Zeit-Diagramm.

Bei der schematischen Vereinfachung in Fig. 1 ist nicht berücksichtigt, daß bei einem Erdbeben von vornherein weder Zeit noch Ort bekannt sind. Die Beobachtungsstationen können daher, wie es in Süddeutschland und dem Alpengebiet der Fall ist, nur mit einer gewissen Annäherung gleichmäßig um ein Gebiet, in dem derartige Ereignisse zu erwarten sind, verteilt sein.

Die mathematischen Beziehungen zur Bestimmung der Unbekannten dürfen daher in der Praxis nur aus der Fig. 2 abgeleitet werden. Hierbei sei in der Erdoberfläche ein rechtwinkliges Koordinatensystem (erweitertes Gitternetz) mit dem Nullpunkt in die Nähe des Herdgebietes gelegt. Die Erdoberfläche kann bei Beschränkung auf 600 km Stationsentfernung und einer Genauigkeitsforderung von 1 Promille als eben angesehen werden. x_0, y_0, z_0 seien die drei Lagekoordinaten des Herdes, v die Geschwindigkeit der Wellen und t_0 die Abgangszeit der Wellen vom Herd, also kurz die Herdzeit. Das sind 5 Unbekannte. Somit werden zu ihrer Bestimmung mindestens 5 Stationen benötigt.

1) Vortrag von der Tagung des Gauvereins Thüringen-Sachsen-Schlesien der Deutschen Physikalischen Gesellschaft am 17. und 18. Juni 1939 in Halle.

Die Genauigkeit, die für die Ankunftszeit an den einzelnen Stationen zu fordern ist, beträgt 0,1 sec.

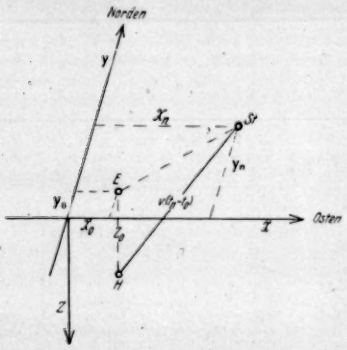


Fig. 2. Lage und Koordinaten von Herd, Epizentrum und Station.

0,1 sec ist gewiß bei sonstigen physikalischen Messungen kein sehr hoher Betrag. Wenn man aber bedenkt, daß es hier nicht darum geht, in einem von dem Beobachter festzulegenden Zeitpunkt irgendein Ereignis auf 0,1 sec genau zu messen, sondern daß auf dem Seismogrammstreifen während der etwa 31,5 Millionen Sekunden des Jahres jede dieser Sekunden auf $^1/_{10}$ absolut genau festgelegt sein muß, so erkennt man erst den Umfang der Anforderungen an den Zeitdienst einer Erdbebenstation.

Um nun die aus den Zeitbestimmungen der Welleneinsätze zu berechnenden Ergebnisse möglichst sicher zu stellen, ist es ratsam, eine größere Stationszahl als 5, die unbedingt notwendig ist, zur Auswertung zu verwenden. Damit erfordert die Berechnung jedoch die Heranziehung eines Ausgleichungsverfahrens. In diesem Fall treten dann ebensoviele Gleichungen als Stationen auf von der Form:

$$F_n = \frac{1}{v}\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + z_0^2} + t_0 - t_n = 0.$$

Hierbei sind x_n, y_n die rechtwinkligen Koordinaten der Beobachtungsstationen, also die feststehenden Koeffizienten. x_0, y_0, z_0, v, t_0 sind die Unbekannten und t_1 bis t_n die alleinigen Meßgrößen.

Da bei einem Überschuß von Stationen die Gleichungen $F_n = 0$ wegen der Meßfehler der Zeiteinsätze nicht alle zugleich streng erfüllt sein können, müssen in jeder der Gleichungen die Zeitabweichungen $v_1\, v_2 \ldots v_n$ als Verbesserungen eingeführt werden. Man erhält dann ein System von n Fehlergleichungen:

$$v_n = \frac{1}{v}\sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2 + z_0^2} + t_0 - t_n.$$

Die Methode der kleinsten Quadrate läßt sich aber auf diese Form der Funktionen nicht anwenden, da die Gleichungen in bezug auf die Unbekannten nicht linear sind. Man ist daher genötigt, Näherungswerte einzusetzen und für die im Vergleich zum Gesamtwert kleinen Korrekturen die Funktionen in eine Reihe zu entwickeln. Diese kann bei den ersten Gliedern abgebrochen werden, wodurch die erforderlichen linearen Gleichungen entstehen. Sollten nach der Ausrechnung der ersten Näherung die Korrekturen noch zu groß sein, so muß das Verfahren wiederholt werden.

Die Näherungswerte des Erdbebenherdes seien durch Klammern gekennzeichnet. Die unbekannten besten Herdwerte machen die Zufügung der kleinen ebenfalls unbekannten Korrekturen x, y, z, ν, τ erforderlich. Es sei also:

$$x_0 = (x_0) + x; \quad y_0 = (y_0) + y; \quad z_0 = (z_0) + z;$$
$$v = (v) + \nu; \quad t_0 = (t_0) + \tau.$$

Die Entwicklung in eine Taylorsche Reihe unter Fortlassung der Glieder höherer Ordnung ergibt dann für die n Funktionen:

$$F_n = F_{n(0)} + \frac{\partial F_{n(0)}}{\partial (x_0)} \cdot x + \frac{\partial F_{n(0)}}{\partial (y_0)} \cdot y + \frac{\partial F_{n(0)}}{\partial (z_0)} \cdot z + \frac{\partial F_{n(0)}}{\partial (v)} \cdot \nu + \frac{\partial F_{n(0)}}{\partial (t_0)} \cdot \tau.$$

Da die Ableitungen an der Stelle (o) feststehende Werte sind, können sie als Koeffizienten a_n, b_n, c_n, d_n, e_n geschrieben werden.

Führt man diese Rechnungen für alle Stationen durch, so erhält man schließlich die gesuchten linearen Formen der Fehlergleichungen:

$$v_n = a_n \cdot x + b_n \cdot y + c_n \cdot z + d_n \cdot \nu + e_n \cdot \tau + l_n.$$

Hier ist $l_n = F_{n(0)}$.

Aus diesen Fehlergleichungen werden in bekannter Weise mit Hilfe der Quadrat- und Produktsummen die fünf Normalgleichungen aufgestellt, die nach den 5 Unbekannten mit einem von Gauß gegebenen Verfahren aufgelöst werden[1]).

Von den praktischen Ergebnissen derartiger Ausgleichungsverfahren, die auf 10 Beben in Mitteleuropa der letzten 8 Jahre angewendet werden konnten, sind die ermittelten

1) G. Schmerwitz, Ausgleichung der besten Stationsbeobachtungen mitteleuropäischer Erdbeben. Zeitschr. f. Geophys. **14**, 351—390, 1938.

Herdtiefen- und Geschwindigkeitswerte in Fig. 3 zusammengefaßt. Sämtliche Herde liegen demnach innerhalb der durch die nahezu konstante Geschwindigkeit von 5,65 km/sec definierten Kruste. Die geringe Abnahme mit der Tiefe kann durch den Temperaturkoeffizient des Elastizitätsmoduls erklärt werden.

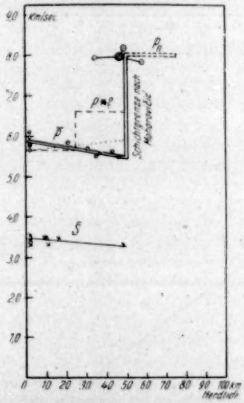


Fig. 3. Elastische Geschwindigkeiten und Schichtgrenzen in der Erdkruste. P = longitudinale, S = transversale Wellen. Gestrichelte und punktierte Kurven = Bisherige Vermutungen.

Aus den oben erwähnten P_n-Wellen ließ sich in drei Fällen auch die Begrenzung der Schicht erneut berechnen. Der Mittelwert dieser Schichttiefe liegt sehr nahe bei 50 km. Er grenzt in Bestätigung der Herdbestimmungen ihre Verteilung innerhalb der Erdkruste nach unten ab.

Der Geschwindigkeitswert von 8,0 km/sec, der auch bei Fernbebenauswertungen nachgewiesen worden ist, besitzt eine Sicherheit von etwa 1 Promille.

Herdtiefen unterhalb 50 km (wie z. B. in Japan und einigen anderen Gegenden bis zu 700 km) sind bisher in Mitteleuropa mit Sicherheit noch nicht beobachtet worden.

2. Der Spannungszustand in der Erdkruste.

Einen auf Messungen gestützten Einblick in den elastischen Spannungszustand innerhalb der Erdkruste konnte man zum erstenmal in jüngster Zeit gewinnen, als man versuchte, die Zug- und Druckverteilung der Einsätze der Longitudinalwellen in dem Stationsbereich um den Erdbebenherd zu messen. Dieser Fortschritt war nur unter der Voraussetzung möglich gewesen, daß zahlreiche Stationen mit gleichartigen Seismometern zum mindesten für die zwei horizontalen Komponenten ausgerüstet wurden.

Hierbei stellte sich zunächst bei japanischen und später auch bei mitteleuropäischen Beben heraus, daß die Verteilung der Stoßrichtungen sehr einfachen Gesetzmäßigkeiten unterliegt.

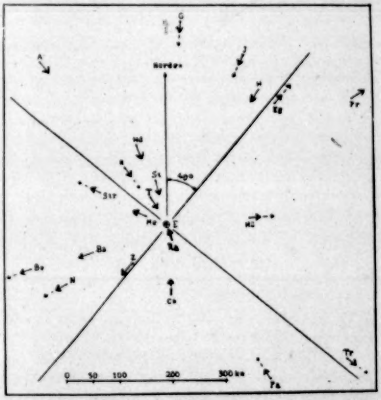


Fig. 4. Druck- und Zugverteilung der longitudinalen Welleneinsätze. Süddeutsches Erdbeben. (Nach Hiller.)

Die Fig. 4, 5, 6 zeigen für Beben in Süddeutschland und in den Alpen die Zug- und Druckverteilung um den Erdbebenherd. Ihre Erklärung haben zuerst japanische Forscher gegeben. In Deutschland sind dann insbesondere von W. Hiller und H. Gräfe wertvolle Beiträge zu dieser Frage geliefert worden.

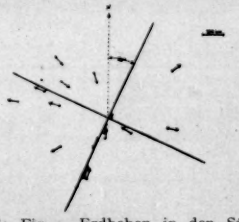


Fig. 5. Wie Fig. 4. Erdbeben in den Südalpen. (Nach Caloi.)

Wenn man (s. Fig. 7) im Inneren der Erdkruste an einer Stelle eine Scherungsspannung voraussetzt und das Gebiet um dieses Zentrum durch zwei zueinander senkrechte Gerade in

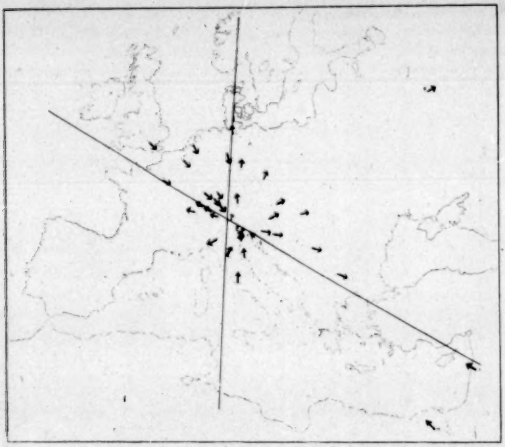


Fig. 6. Wie Fig. 4. Erdbeben in den Alpen. (Nach Caloi.)

Fig. 7. Scherungsspannungen, welche die Zug- und Druckverteilung verursachen.

4 Quadranten aufteilt, so kommt man zu der einfachen Erklärung dieser Erscheinung.

Ein Kräftepaar allein (in der Fig. 7 stark ausgezogen) kann in der Form einer Scherungsspannung im Inneren eines Körpers nicht existieren, da dieses ja eine Drehung desselben zur Folge haben müßte. Aus den Grundlagen der Elastizitätstheorie ist auch bekannt, daß, falls eine Spannung X_y besteht, auch die komplementäre Y_x, die den gleichen Betrag aber mit entgegengesetztem Vorzeichen hat, ebenfalls bestehen muß. Zeichnen wir diese Spannungen ein, so ergeben die Resultanten ohne weiteres die in den Seismometeraufzeichnungen hervortretende Spannungsverteilung in den 4 Quadranten. Selbstverständlich ist die so gegebene Darstellung nur ein elementarer anschaulicher Auszug aus den komplizierten theoretischen Betrachtungen, welche die Stoßverteilung aus dem

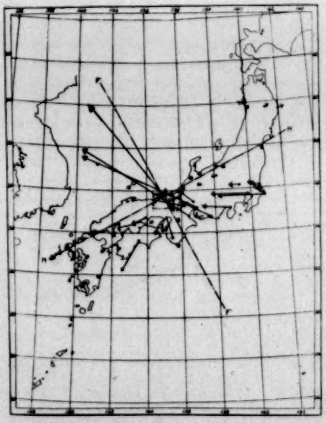


Fig. 8. Knotenlinien der Zug- und Druckverteilung eines japanischen Erdbebens. (Nach Kunitomi.)

Fig. 9. Durch Triangulation ermittelte Verlagerung der Erdoberfläche bei dem gleichen Beben wie in Fig. 8. (Nach Tsuboi.) Die vermessene Fläche ist in Fig. 8. punktiert.

elastischen Zustand und die Transformation der elastischen Energie in Wellenbewegung im Herdgebiet in mathematischer Form liefern. Diese elementare Erklärung genügt jedoch allen Anforderungen an die Berechnungen, die zur Zeit an Hand der Meßergebnisse der mitteleuropäischen Beben durchführbar sind.

Wenn das Kräftepaar nicht wie hier in der Ebene, d. h. parallel zur Erdoberfläche liegt, sondern geneigt ist, so können außer den rechtwinkligen Knotenlinien auch alle übrigen Schnittfiguren der Erdoberfläche mit zwei sich rechtwinklig kreuzenden Ebenen vorkommen. Diese Ebenen, welche senkrecht zueinander und senkrecht zu der Zeichenebene in Fig. 7 stehen, trennen die Gebiete entgegengesetzt gerichteter Spannungen voneinander ab. Fig. 6 zeigte ein Beispiel für einen derartigen allgemeineren Fall. Nach neueren Beobachtungen in Japan scheint es dort auch möglich zu sein, daß mitunter Kegelschnitte als Knotenlinien auftreten können.

Wie genau eine derartige Scherungsspannung im Herd durch die Knotenlinien der Zug- und Druckverteilung wiedergegeben wird und den Beweis für die Richtigkeit dieses Zusammenhanges zeigt das Beispiel des Nord-Tango-Bebens. Hier konnte außer den Knotenlinien (Fig. 8) durch Triangulation vor und nach dem Beben der Scherungsbruch auch an der Erdoberfläche wegen seiner gewaltigen Ausmaße leicht vermessen werden. In Fig. 9 sind die mehrere Meter betragenden horizontalen Bodenverrückungen und ihre Verteilung deutlich zu erkennen. Die Richtung dieses Scherungsbruches an der Erdoberfläche und die der entsprechenden Knotenlinie (Fig. 8) stimmt innerhalb der Meßgenauigkeit vollkommen überein.

Da die Energie der mitteleuropäischen Beben ganz erheblich geringer ist, sind die entsprechenden Bodenverschiebungen, die in der Größenordnung einiger Zentimeter liegen, durch Triangulation nicht so leicht festzustellen. Es ist auch zu bedenken, ob diese sich hier infolge der Tiefenlage der Herde überhaupt bis an die Oberfläche auswirken.

Nach dem bisher vorliegenden Material scheinen bei Erdbebenherden in der Nähe der Erdoberfläche horizontale Richtungen der Scherungsspannungen vorzuherrschen, während in größeren Tiefen, wie insbesondere japanische Tiefbeben zeigten, die Scherungskräfte fast ausschließlich in vertikaler Richtung liegen. In allen Fällen sind jedoch hier immer Scherungsspannungen verantwortlich gewesen. Daher ist eine Zurückführung dieser Erscheinungen auf eine Schrumpfung der Erde, welche mit Volumenveränderungen verbunden sein müßte, nicht mehr gerechtfertigt. Die heute fast allgemein anerkannte Erklärungsgrundlage bildet die Vorstellung von einer Art zäh-plastischen Strömung des Materials unterhalb der Kruste, wobei zwar nur sehr kleine Wegstrecken zurückgelegt aber sehr große Spannungen angesammelt werden können.

Um die Forschungsmöglichkeiten hier voll auszuschöpfen, ist auch für unser mitteleuropäisches Erdbebengebiet noch viel an Aufbau- und Meßarbeit zu leisten.

Die Ergebnisse, die insbesondere das Auswertungsverfahren mit Hilfe der Ausgleichung geliefert hat, verschafften immerhin schon einen Einblick in bezug auf die Schichtung der Erdkruste, wie er bisher in keinem anderen erdbebenreicheren Gebiet der Erde gewonnen worden ist. Noch mancher Beitrag nicht nur rein wissenschaftlicher Art, sondern hierüber hinaus in praktischer und wirtschaftlicher Richtung ist in den hier kurz gestreiften Problemen enthalten.

Jena, Reichsanstalt für Erdbebenforschung, Juni 1939.

(Eingegangen 8. Juli 1939)

Über den Abstand der Energiestufen der Atomkerne

Von Paul Otto Müller

Um den durchschnittlichen Abstand der Energieniveaus eines Atomkernes zu bestimmen, nehmen wir an, der Kern verhalte sich so wie ein Tröpfchen einer inkompressiblen Flüssigkeit, dessen Oberflächen- und Volumswellen zu untersuchen sind. Es handelt sich also darum, die Eigenfrequenzen eines solchen Tröpfchens zu bestimmen.

Zur Bestimmung der Eigenfrequenzen der Oberflächenwellen hat Bethe[1]) die Oberflächenwellen eines Ebenenstückes untersucht; nimmt man an, der Kern schwinge mit jeder dieser Eigenfrequenzen wie ein Planckscher Oszillator, so kann man die durchschnittliche Energie der Oberflächenwellen bei einer bestimmten Temperatur und ebenso den Niveauabstand berechnen. Es zeigt sich jedoch, daß man um so größere Abweichungen von der Erfahrung erhält, je leichter der Kern ist, da dann wohl eben die Krümmung der Kernoberfläche berücksichtigt werden muß.

Eine wesentlich bessere Übereinstimmung mit der Erfahrung erhält man, wenn man die Oberflächenwellen auf der Flüssigkeitskugel untersucht und hier die Eigenfrequenzen berechnet[2]).

1) H. A. Bethe, Rev. of mod. Phys. **9**, 86, 1937.
2) E. Bagge, Ann. d. Phys. **33**, 392, 1938.

Wir nehmen mit Bagge für die Oberfläche des schwingenden Tropfens diese Reihenentwicklung an:

$$r = c_{00} + \sum_{l=1}^{\infty} Y_l(\vartheta, \varphi),$$

wobei $Y_l(\vartheta, \varphi) = \sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\vartheta)$ die allgemeine Kugelfunktion und die Koeffizienten $c_{l,m}$ Funktionen der Zeit bedeuten.

Berücksichtigt man noch die Inkompressibilität der Kernflüssigkeit, so erhält man für die kinetische Energie T und die potentielle Energie V (auf Grund der Oberflächenspannung) folgende Ausdrücke:

$$T = 2\pi\varrho R^3 \cdot \sum_{l=2}^{\infty} \frac{1}{l(2l+1)} \sum_{m=-l}^{l} \frac{dc_{l,m}}{dt} \cdot \frac{dc_{l,-m}}{dt}$$

$$V = \frac{G}{2R^2} \cdot \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(l-1)(l+2)}{2l+1} \cdot \sum_{m=-l}^{l} c_{l,m} c_{l,-m}.$$

In dieser Formel bedeutet R den Radius der Flüssigkeitskugel, ϱ die Massendichte und G die potentielle Energie der nichtangeregten Kugel; der zuletzt genannte Energiebetrag ergibt sich infolge der Oberflächenspannung, die also eine Berücksichtigung der Kernkräfte darstellt

$$(G = 13{,}25\ \mathrm{A}^{2/3}\ \mathrm{MeV}).$$

Aus der Bedingung für Eigenschwingungen: $\frac{d}{dt}(T+V) = 0$ erhält man schließlich für die Koeffizienten $c_{l,m}$ folgende Differentialgleichung:

$$c''_{l,m} + \frac{G}{4\pi\varrho R^5} \cdot l(l-1)(l+2) \cdot c_{l,m} = 0.$$

Für die Eigenfrequenzen der Oberflächenschwingung erhält man daher den Wert:

$$\omega_{l,m}^2 = \omega_l^2 = \frac{G}{4\pi\varrho R^5} \cdot l(l-1)(l+2).$$

Nimmt man nun noch an, der Kern schwinge mit jeder dieser Eigenschwingungen wie ein Planckscher Oszillator, so bekommt man mit $\varepsilon_l = h \cdot \omega_l$ als Energieniveau folgenden Ausdruck für die Energie U_F der Oberflächenwellen (der Index F möge daran erinnern, daß es sich hier um die Schwingungen auf der Fläche handelt).

$$U_F = \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) \cdot \frac{\varepsilon_l}{e^{\frac{\varepsilon_l}{\tau}} - 1} \cdot \qquad (\tau = kT.)$$

Da der Energieniveauabstand nach Bethe[1]) gegeben ist durch

$$D(U) = \tau \sqrt{2\pi \frac{dU}{d\tau}} \cdot e^{-S},$$

1) H. A. Bethe, Rev. of mod. Phys. **9**, 81, 1937.

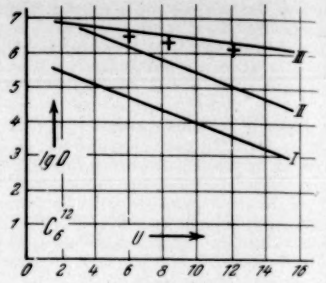


Fig. 1.

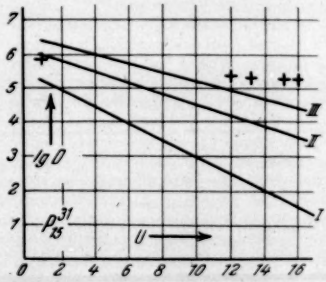


Fig. 2.

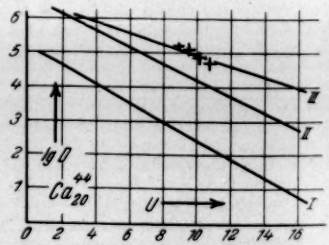


Fig. 3.

so hat man noch $\frac{dU}{d\tau}$ und die Entropie S zu bestimmen, wofür man erhält:

$$\frac{dU_F}{d\tau} = \sum_{l=2}^{\infty} \frac{(2l+1) \cdot \left(\frac{\varepsilon_l}{\tau}\right)^2 \cdot e^{\frac{\varepsilon_l}{\tau}}}{\left(e^{\frac{\varepsilon_l}{\tau}} - 1\right)^2};$$

$$S_F = \frac{U_F}{\tau} - \sum_{l=2}^{\infty} (2l+1) \ln\left(1 - e^{-\frac{\varepsilon_l}{\tau}}\right).$$

Die entsprechenden Werte für die Volumswellen, U_v, $\frac{dU_v}{d\tau}$ und S_v haben nach Bethe[1] die Gestalt:

$$U_v = U_0 \cdot \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^4$$

mit

$$U_0 = 8{,}2\ A^{1/3}\,\text{MeV}$$

und

$$\tau_0 = \frac{4{,}75}{A^{1/3}}\ \text{MeV}.$$

$$\frac{dU_v}{d\tau} = \frac{4}{\tau} \cdot U_v$$

und

$$S_v = \frac{4}{3\tau} \cdot U_v.$$

Man hat nun die Werte von $U = U_F + U_v$, $\frac{dU}{d\tau} = \frac{dU_F}{d\tau} + \frac{dU_v}{d\tau}$ und $S = S_F + S_v$ in die Formel für $D(U)$ einzutragen und die sich ergebenden Werte mit der Erfahrung zu vergleichen. Es zeigt sich dabei, daß man bei leichten Kernen „bessere" Werte erhält, wenn man die Volumswellen überhaupt nicht berücksichtigt, was vielleicht dadurch erklärbar ist, daß bei den leichten Kernen die Oberflächenschwingung ja so fast alle Teilchen erfaßt.

In den Figuren sind nun die Energieniveauabstände für C_6^{12}, P_{15}^{31} und Ca_{20}^{41} eingetragen; als Abszisse ist die Anregungsenergie (in MeV) und als Ordinate ist lg $D(U)$ gewählt worden, wobei $D(U)$ aber in eV ausgedrückt wurde.

Die Kurve I gibt die Werte entsprechend den Rechnungen von Bethe, und II die Werte auf Grund der Eigenschwingungen der Kugel, aber unter Berücksichtigung der Volumswellen. Läßt man die letzteren überhaupt fort, so erhält man die Kurve III, die bei diesen leichten Kernen wohl am besten mit der Erfahrung übereinstimmt. Die Kreuze deuten die experimentellen Daten an[2]).

Herrn Dr. C. F. v. Weizsäcker möchte ich für die Anregung zu dieser Arbeit ebenso wie für die Hilfe bei ihrer Durchführung meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Gleichzeitig gilt mein Dank dem Reichsforschungsrat und der Deutschen Forschungsgemeinschaft in Berlin für die Verleihung eines Forschungsstipendiums.

1) l. c. S. 87.

2) M. S. Livingston and H. A. Bethe, Rev. of mod. Phys. **9**, 302 und 308; E. Fünfer, Ann. d. Phys. (5) **32**, 321 und 324.

Berlin-Dahlem, Max-Planck-Institut, im Juli 1939.

(Eingegangen 14. August 1939)

Die Absorption der Höhenstrahlung in der Atmosphäre und die Mesonen

Von Werner Kolhörster und Ilse Matthes

Mitteilung aus dem Institut für Höhenstrahlenforschung der Universität Berlin

Die Intensität der Höhenstrahlung hat in der Höhe von etwa 17 km nach Messungen von Regener und Mitarbeitern (1) ein ausgeprägtes Maximum. Dies wird nach Euler und Heisenberg (2) dahin gedeutet, daß die primäre Höhenstrahlung bereits nach Durchsetzen von 7—8 cm *Hg* oder einem Zehntel der Atmosphäre im Gleichgewicht mit ihren Sekundären, den Mesonen, sich befindet.

Wie bereits gezeigt (3), gilt für die mittlere freie Weglänge der Mesonen L die Beziehung

$$L = \frac{H}{b \cdot f}, \qquad (1)$$

wenn man unter H die Höhe der homogenen Atmosphäre ($8 \cdot 10^5$ cm), unter $f = \frac{1}{I} \cdot \frac{dI}{db}$ den Luftdruckkoeffizienten der harten Komponente, also der Mesonen, und unter b den mittleren Barometerstand in cm *Hg* versteht, bei dem f bestimmt wurde. Diese Beziehung gilt unabhängig von irgendwelchen Annahmen über die Entstehungshöhe der Mesonen und enthält auch keine explizite Annahme über ihre Energie. Der Wert von $b \cdot f$ ergab sich z. B. aus den Messungen des kompensierten Luftdruckeffekts (3) zu 1,21, also $L = \frac{H}{1{,}21} = 0{,}83\ H$.

Inzwischen hat Weisz (5) aus der Richtungsverteilung der Höhenstrahlen für kleine Winkeländerungen der Vertikalstrahlung die Beziehung

$$-\frac{dlI}{d\sec\vartheta} - \cos\vartheta = \frac{H_b}{L} \qquad (2)$$

abgeleitet, wobei H_b die Bildungshöhe der Mesonen bedeutet, d. h. diejenige Höhe, in welcher der Zerfall der Mesonen merklich einsetzt; auch die linke Seite von Gleichung (2) enthält nur experimentell bestimmbare Werte. Nach der von Weisz aus den Messungen von Brackertz (6) berechneten Tabelle wird für Gleichung (2) bei Vertikalstrahlen ($\vartheta \to 0$) $\frac{H_b}{L} = 1{,}08$, woraus sich, kombiniert mit Gleichung (1) $\frac{L}{H} = 0{,}83$,

ergibt

$$\frac{H_b}{H} = 1{,}08 \cdot 0{,}83 = 0{,}9$$

Tabelle I

Schwächungskoeffizienten in Luft aus Ballonmessungen; allseitiger Einfall

Höhe in km	0–1	1–2	2–3	3–4	4–5	5–6	6–7	7–8	8–9	
Höhe in cm Hg	71,7	64,4	57,4	50,8	44,9	39,5	34,6	30,1	26,9	
μ/ϱ Kolhörster 1913/14			4,4	4,6	5,0	5,5	6,3	4,0	3,2	$10^{-3}\,cm^2\,g^{-1}$
μ/ϱ Sucksdorff 1931/33	2,05	5,05	5,1	5,0	4,7					$10^{-3}\,cm^2\,g^{-1}$
μ/ϱ Masuch, Juilfs 1934/38	2,0	4,17	4,72	5,09	5,61	6,03	6,67	4,35	4,01	$10^{-3}\,cm^2\,g^{-1}$
Mittel	2,0	4,6	4,7	4,9	5,1	5,8	6,5	4,2	3,6	

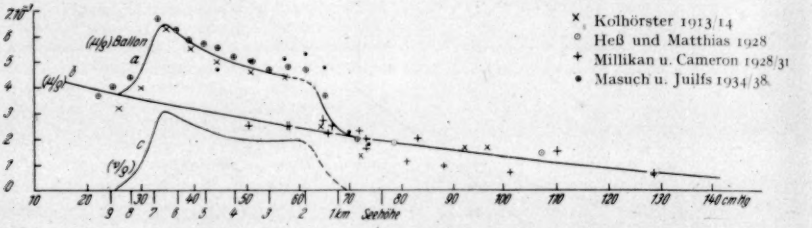


Abb. 1a, b, c. Gang des Absorptions- und Zerfallskoeffizienten der Höhenstrahlen in der Troposphäre.

oder $$H_h = 0{,}9 \cdot H = 7{,}2 \text{ km}.$$

Demnach sollte man aus vergleichenden Intensitätsmessungen in der Atmosphäre den Zerfall der Mesonen nachweisen können. Denn unter Berücksichtigung sowohl der reinen Absorption, die in erster Näherung massenproportional sein dürfte, als auch des Mesonenzerfalls folgt die Intensität I in den verschiedenen Höhen nach den beiden Ansätzen $dI = -I \cdot \mu H \cdot dx$ für die Absorption und $dI = -\frac{I}{L} \cdot dx$ für den Zerfall zu $I = I_0\, e^{-(\mu+\nu)h}$, oder da $i = i_0 \cdot e^{-\lambda t}$,

$$\left.\begin{aligned} \lambda t &= \frac{1}{\tau_0} \cdot \frac{\mu \cdot c}{E} \cdot h = \frac{h}{L}, \\ I &= I_0 \cdot e^{-\left(\mu + \frac{1}{L}\right) \cdot h}. \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

Tatsächlich liefern schon die ersten Ballonbeobachtungen von Kolhörster 1913/14 (7), die 1931/33 von Suckstorff (8) und 1934–38 von Masuch und Juilfs (9) bestätigt worden sind, ein zu einer solchen Untersuchung durchaus geeignetes Material. Das merkwürdige Verhalten des sog. Schwächungskoeffizienten in der Troposphäre weist einen bestimmten Gang mit der Höhe auf, wie er in der Tabelle I und in der Fig. 1a dargestellt ist. Dieser Verlauf wurde bisher gedeutet (7, 10) als allmähliche Sättigung der einfallenden Strahlen mit Sekundären einer Reichweite von etwa 4,2 m Wasseräquivalent, die beim Übergang vom Weltenraum in die Erdatmosphäre entstehen.

Doch nur bei Messungen mit Luft als Absorber zeigt sich ein so ausgeprägter Gang. Hierbei liegen nämlich die Meßpunkte um so beträchtliche Abstände voneinander entfernt, daß der Zerfall der Mesonen in Betracht kommen kann. Bei Bestimmungen des Absorptionskoeffizienten mit Absorbern größerer Dichte wie Wasser und Eis spielt dagegen der Mesonenzerfall keine Rolle. Vielmehr läßt sich aus derartigen Messungen in verschiedenen Höhen (10, 11, 12) der Gang des wirklich auf Massenabsorption beruhenden Absorptionskoeffizienten näherungsweise auch für größere Höhen bestimmen (Fig. 1b).

Nimmt man nun an, daß die Differenzen zwischen den aus Ballonaufstiegen (Luftabsorption) gewonnenen Schwächungskoeffizienten und den aus direkten Absorptionsmessungen an Eis und Wasser ermittelten Absorptionskoeffizienten auf den Mesonenzerfall zurückzuführen sind, so ergibt sich nach Tabelle II für den Zerfallskoeffizienten das Bild der Fig. 1c, wobei der Zerfallskoeffizient in Analogie zum Massenabsorptionskoeffizienten in (μ/ϱ)-Einheiten ausgedrückt ist. Berücksichtigt man den Gang der Luftdichte mit der Höhe, so ergibt sich nach Tabelle II für ν bzw. $1/L$ der Wert von $(1{,}74 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-6}\,cm^{-1}$ oder $L = 5{,}75 \pm 0{,}19$ km, und zwar nahezu konstant in dem weiten Bereich zwischen 6,2 und 2,6 km. In Anbetracht der Unsicherheit bei der Extrapolation des Massenabsorptionskoeffizienten dürfte dieser Wert mit dem aus dem kompensierten Luftdruckeffekt ermittelten (3) von $L = 6{,}6$ km genügend genau übereinstimmen. Unter 2 km Höhe nimmt der Schwächungskoeffizient wieder stark ab und erreicht bald Werte, die dem Massenabsorptionskoeffizienten

Tabelle II

Verlauf von Schwächungs-, Absorptions- und Zerfallskoeffizienten in der Troposphäre nach Fig. 1

Höhe in km	Höhe in cm Hg	(μ/ϱ) Ballon cm^2g^{-1}	(μ/ϱ) cm^2g^{-1}	(ν/ϱ) cm^2g^{-1}	Mittlere Dichte ϱ gcm^{-3}	ν cm^{-1}
6,2	35	$6{,}4 \cdot 10^{-3}$	$3{,}4 \cdot 10^{-3}$	$3{,}0 \cdot 10^{-3}$	$5{,}95 \cdot 10^{-4}$	$1{,}79 \cdot 10^{-6}$
5,1	40	5,7	3,1	2,6	6,80	1,77
4,2	45	5,2	3,0	2,2	7,65	1,68
3,3	50	4,8	2,8	2,0	8,50	1,70
2,6	55	4,5	2,6	1,9	9,38	1,78

$1/\nu = L = 5{,}75 \cdot 10^5$ cm, Mittel $\nu = 1{,}744 \cdot 10^{-6}$.

gleichkommen. Diese Erscheinung ist vielleicht am einfachsten durch das Einsetzen einer neuen starken Sekundärstrahlenbildung in dieser Höhe zu erklären (langsame Mesonen?). Dafür spricht die enge Abhängigkeit der gekoppelten Höhenstrahlen oder großen Luftschauer von der Lufttemperatur in den bodennahen Schichten (13).

Die aus den Ballonmessungen abgeleitete mittlere Weglänge führt also zu denselben kleinen Werten, wie sie die Bestimmungen liefern, die keine Voraussetzung über die Bildungshöhe der Mesonen erfordern [z. B. (3, 4)]. Auch die Kombination der Messungen der Richtungsverteilung mit denen des kompensierten Luftdruckeffekts ergab, wie anfangs gezeigt, ebenfalls den kleinen Wert für L in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Befunden (vgl. Fig. 1a).

Das Ergebnis ist anscheinend im Widerspruch zu denjenigen Bestimmungen [z. B. (14, 15)], welche die Bildungshöhe der Mesonen bei etwa 17 km voraussetzen müssen, und die dann mittlere Weglängen von etwa 14 und mehr km liefern. Diesen Berechnungen liegen jedoch Messungen mit stärkerer Vorfilterung zugrunde, die sich also auf Mesonen höheren Energiebereichs beziehen. Unsere Ergebnisse würden demnach für Strahlen etwa 3fach geringerer Energie gelten.

Literaturverzeichnis

1) E. Regener und G. Pfotzer, Physik. Zeitschr. **35**, 779, 1934; G. Pfotzer, Zeitschr. f. Phys. **102**, 23, 1936.
2) H. Euler und W. Heisenberg, Erg. d. Exakt. Naturwiss. **17**, 1, 1938.
3) W. Kolhörster und I. Matthes, Physik. Zeitschr. **40**, 142, 1939.
4) Henri D. Rathgeber, Naturwiss. **26**, 842, 1938.
5) P. Weisz, Naturwiss. **27**, 132, 501, 1939; Phys. Rev. **55**, 1266, 1939.
6) E. Brackertz, Diss. Berlin 1936.
7) W. Kolhörster, Abh. d. Naturforsch. Ges. Halle 1914; Verh. dtsch. phys. Ges. **15**, 111, 1913; **16**, 719, 1914; Naturwiss. **19**, 574, 1931.
8) G. A. Suckstorff, Diss. Berlin 1933.
9) J. Juilfs, Diss. Berlin 1938.
10) W. Kolhörster und L. Tuwim, Erg. kosm. Phys. **1**, 127, 1931.
11) R. A. Millikan und G. H. Cameron, Phys. Rev. **37**, 235, 1931.
12) V. F. Heß und O. Mathias, Sber. d. Akad. Wiss. Wien, math.-naturw. Kl. IIa **137**, 327, 1928.
13) W. Kolhörster, Physik. Zeitschr. **40**, 488, 1939.
14) P. M. S. Blackett, Phys. Rev. **54**, 273, 1938; Nature **142**, 992, 1938.
15) B. Rossi, Nature **142**, 993, 1938.

Berlin-Dahlem, den 18. September 1939.

(Eingegangen 18. September 1939.)

BESPRECHUNGEN

Sämtliche in diesem Heft besprochenen oder vom Verlag angezeigten Bücher sind in allen deutschen Buchhandlungen zu erhalten

Kants Opus postumum. Herausgegeben von Artur Buchenau. Bd. I: XIII u. 645 S., 1936. Bd. II: VIII u. 825 S., 1938. Berlin u. Leipzig, de Gruyter. RM 72.—.

Kants Aufzeichnungen zu seinem letzten Werk, an dem er bis zum Erlahmen seiner Kräfte gearbeitet hat, sind erst im letzten Jahr in zwei starken Bänden vollständig veröffentlicht worden. Von allen philosophischen Werken Kants beschäftigt sich dieses am meisten mit speziell physikalischen Fragen und verdient daher in dieser Zeitschrift ausdrücklicher Erwähnung.

Kant hatte in der Kritik der reinen Vernunft von Erkenntnissen a priori, wie z. B. den Axiomen der Geometrie, gesprochen, die zwar nicht in der historischen Entwicklung, aber im logischen Aufbau der Wissenschaft vor aller Erfahrung gelten, weil sie die Voraussetzung der Möglichkeit von Erfahrung bilden. Er hat damit ein Grundproblem der Erkenntnis bezeichnet, denn es ist sicher, daß der Begriff der Erfahrung, den wir meist kritiklos anwenden, bereits komplizierte Voraussetzungen enthält. Andererseits hat die moderne Physik Erkenntnisse, die für Kant a priori schienen, der Kritik der Erfahrung unterworfen. Man hat

versucht, den Bereich des a priori Gegebenen einzuschränken. Kants eigene spätere Entwicklung weist in eine andere Richtung. In den „metaphysischen Anfangsgründen der Naturwissenschaft" suchte er, seinen Begriff der „reinen Naturwissenschaft" näher bestimmend, auch die Grundgesetze der Mechanik bis zum Gravitationsgesetz aus Überlegungen a priori herzuleiten, und die vollständige Durchführung eines analogen Programms für die ganze Physik scheint das Ziel des Opus postumum gewesen zu sein. Wenn Kant selbst aprioristischen Argumentationen einen so weiten Anwendungsbereich zuschrieb, so erscheint es mehr in seinem Sinne, angesichts der heutigen Physik nicht dem ursprünglichen Begriff des „Apriori" ein kleines Reservat zu sichern, sondern den Begriff einer grundsätzlichen Revision zu unterwerfen, die seine wichtigen Grundlagen mit der neuen Erkenntnis einer durchgängigen empirischen Revidierbarkeit unserer Erkenntnisse von der Außenwelt vereinbar macht. Hierfür wird ein Verständnis der Motive, die Kant zur Erweiterung seines Begriffs trieben, sehr lehrreich sein.

Der Inhalt des vorliegenden Buches entspricht nicht ganz seinem Umfang, denn viele Gedanken wiederholen sich in immer neuen Anläufen zur Formulierung, und weite Partien zeigen nicht mehr Kants frühere Kraft und Geschlossenheit des Denkens. Die vorliegende vollständige Ausgabe mit Register und Schilderung des Schicksals des Manuskripts genügt allen kritischen Ansprüchen und leistet jedem, der auf diesem Gebiet arbeiten will, einen außerordentlichen Dienst.

C. F. v. Weizsäcker

Julius Meyer, Einführung in die Chemie für Studierende technischer Berufe. VIII, 220 Seiten mit 13 Abbildungen. 8°. S. Hirzel, Leipzig 1939. Ganzleinen RM 7.80.

Es gehört eine glückliche Hand dazu, eine Einführung in die Chemie zu schreiben, die in knapper Auswahl sachlich richtig, ohne Vernachlässigung wesentlicher Züge und ohne das Interesse erlahmen zu lassen, gerade das bringt, was den Mann aus der Praxis, den Techniker, aus der Chemie vornehmlich angeht, aber was er in den üblichen Lehrbüchern doch niemals nachsieht, weil er befürchtet, nicht in den Zusammenhang eindringen zu können, oder weil er Angst vor der Seitenzahl hat. Diese glückliche Hand hat der Verfasser mit der Abfassung seines Buches bewiesen. Er hat es ausdrücklich für die Studierenden technischer Berufe bestimmt, daher sind einzelne Gebiete, die dabei erhöhtes Interesse beanspruchen, wie Heizung, Atmung, Schadenfeuer, Legierungen, Baustoffe, technisches Eisen, Korrosion u. a., in besonderen Abschnitten behandelt worden. Auswahl und Darstellung sind jedesmal gut und treffend, man freut sich, daß ein solches Buch existiert und daß man es empfehlen kann.

Rogowski

Mitteilungen aus dem Kaiser-Wilhelm-Institut für Eisenforschung. Herausgegeben von Fr. Körber. Bd. 20. 303 S. Düsseldorf 1938. Verlag Stahleisen. Preis geh. RM 57.85.

Der vorliegende Band (Jahrgang 1938) besteht aus 21 Lieferungen mit insgesamt 25 Abhandlungen. Aus dem reichen Inhalt des Bandes dürften die Leser dieser Zeitschrift für folgende Themen besonderes Interesse haben: Wechselbeanspruchung und Kristallzustand, Untersuchungen über Umwandlungsvorgänge in Stählen, Untersuchungen an speziellen Zustandsdiagrammen (*Fe–Re, Fe–Nb, Fe–Nb–C*), chemische und spektroskopische Analysenmethoden, elektrischer sowie photoelektrischer Ausdehnungsschreiber, magnetische Werkstoffprüfung u. a. m.

Der Band bringt ferner verschiedene wichtige technische Untersuchungen aus dem Gebiet der Erzverarbeitung sowie der Metallverarbeitung. Der Inhalt des Bandes spiegelt die außerordentliche Vielseitigkeit des Eisenforschungsinstituts wieder.

E. Kordes

Max Ott, Chemie für Studierende und zum Selbstunterricht. Reinhardts naturwissenschaftliche Kompendien Bd. 5 und 6. Herausgegeben von V. Riederer von Paar. II. Teil: Anorganische Chemie. 179 Seiten mit 26 Abbildungen. RM 2.75. – III. Teil: Organische Chemie. 134 Seiten. Verlag von Ernst Reinhardt in München, 1939. RM 2.50.

In den beiden vorliegenden Kompendien ist die anorganische und die organische Chemie behandelt. Die Gliederung ist jedesmal so, daß in einem Grundriß, der den größeren Teil eines Bandes einnimmt, die notwendigen und wichtigen Tatsachen in systematischer Anordnung erwähnt werden; er ist so angelegt, daß er, schon während der Vorlesung benutzt, vielfach das Mitschreiben erleichtert oder entbehrlich macht. In dem angeschlossenen kürzeren Repetitorium wird über das besprochene Gebiet ein Überblick gewährt, der gegenüber dem Grundriß neue, noch nicht erwähnte Gesichtspunkte bringt. So werden z. B. im anorganischen Teil die Wasserstoffverbindungen, die Oxyde oder Sulfide nach Gruppen im periodischen System generell betrachtet. Als dritter Teil sind recht sorgfältig ausgewählte Fragen, teilweise mit Antworten, mindestens aber mit Hinweisen, wo im Grundriß die Antworten zu finden sind, angeschlossen. – Beide Bände machen den Eindruck einer gründlichen Arbeit, die auf längeren praktischen Erfahrungen beruht. Sie werden von den Kandidaten, die sich Chemie zum Nebenfach gewählt haben, sicher mit Erfolg benutzt werden.

Rogowski

NACHRICHTEN

Ernannt: Der Dozent Dr. Nikolaus Hofreiter an der Universität Wien zum ord. Professor der Mathematik an der gleichen Hochschule.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der anorganischen Chemie an der Universität und Technischen Hochschule Breslau Dr. Otto Ruff.

Verantwortlicher Schriftleiter: Professor Dr. Dr. h. c. P. Debye, Berlin. — Für den Anzeigenteil verantwortlich: A. Plohmann, Leipzig. — Verlag S. Hirzel, Leipzig C 1, Königstr. 2. — Druck: Bibliographisches Institut AG., Leipzig. — Zur Zeit gilt Anzeigenpreisliste 3. — Printed in Germany.